



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Автоматизация и математическое моделирование в НГК»

Курс лекций
по дисциплине:

Моделирование систем управления в нефтегазовом комплексе

для студентов заочной формы обучения

Ростов–на–Дону
ДГТУ
2024

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МОДЕЛИРОВАНИЯ

1.1. Определение, критерии применения и достоинства метода моделирования

Моделирование – это метод исследования свойств моделируемого объекта–оригинала путём построения и исследования его модели.

Модель – это вспомогательный объект, имеющий идентичные свойства с объектом–оригиналом и служащий для получения такой информации, которая трудно или вообще невозможно получить путём натурального, т.е. непосредственного исследования объекта–оригинала.

Моделирование является оперативным, недорогим, эффективным и достаточно мощным средством исследования самых различных объектов и систем. Но оно должно применяться далеко не во всех случаях. Известно множество задач, решаемых более эффективно иными методами. Вместе с тем, для целого класса задач этот метод является наиболее приемлемым. Правильное его применение возможно лишь в случае чёткого понимания сущности этого метода и условий его использования.

Критерии целесообразности применения моделирования:

- неприемлемость или отсутствие аналитических методов решения задач;
- полная уверенность о наличии достаточного количества информации о моделируемом объекте (системе), которая необходима для обеспечения достоверности результатов моделирования;
- достаточно большой объём вычислений, выполнение которого вручную практически невозможно;
- непригодность всех другим методов решения задач;
- наличие материальной возможности для построения модели.

Метод моделирования имеет определённые преимущества перед другими методами исследования. Он позволяет:

- получить ответы на многие вопросы, возникающие на этапах замысла и предварительного проектирования будущей системы, без применения дорогостоящего метода проб и ошибок;
- имитировать и исследовать особенности функционирования системы в любых условиях, в том числе и гипотетических, не реализуемых в натуральных экспериментах. Это возможно в силу того, что на модель не распространяются никакие реальные ограничения;
- экстраполировать с помощью модели результаты эксплуатационных испытаний системы для прогнозирования её поведения;
- сократить до нескольких минут продолжительность испытаний системы, занимающей в реальных условиях дни и месяцы;
- определять статистические характеристики функционирования системы, а также исследовать их изменение путём варьирования её случайных параметров;

– исследовать такие сложные системы, когда неприменимы никакие другие методы.

1.2. Основные принципы моделирования

1. Принцип информационной достаточности. При полном отсутствии информации об исследуемой системе построение её модели невозможно. При наличии полной информации о системе её моделирование лишено смысла.

Существует некоторый критический уровень априорных сведений о системе (уровень информационной достаточности), при достижении которого может быть построена её адекватная (достоверная) модель.

2. Принцип осуществимости модели. Модель должна обеспечивать достижение поставленной цели исследования за конечное время с вероятностью $P(t)$ не менее заданного порогового значения P_0 . Модель считают осуществимой, если одновременно выполняются два неравенства:

$$P(t) \geq P_0, \quad t \leq t_0,$$

где t_0 – заданное граничное значение времени достижения цели моделирования.

3. Принцип множественности моделей. Модель должна отражать в первую очередь те свойства реальной системы, которые влияют на выбранный показатель её эффективности. Поэтому при использовании любой конкретной модели познаются лишь некоторые стороны исследуемого процесса системы. Для более полного его исследования необходим ряд моделей, позволяющих с разных сторон и разной степенью детальности отражать рассматриваемый процесс.

4. Принцип агрегирования. Сложную систему можно представить состоящей из отдельных подсистем (агрегатов), каждый из которых имеет свой вид математического описания. Например, один агрегат описывается логическими соотношениями, другой – обыкновенными дифференциальными уравнениями, третий – разностными уравнениями и т.п. Принцип агрегирования позволяет достаточно гибко перестраивать модель в зависимости от задач исследования.

5. Принцип компромисса между сложностью и точностью модели. Необходимость указанного компромисса обусловлена тем очевидным фактом, что чем выше требования к точности и достоверности результатов моделирования, тем выше должен быть уровень её сложности.

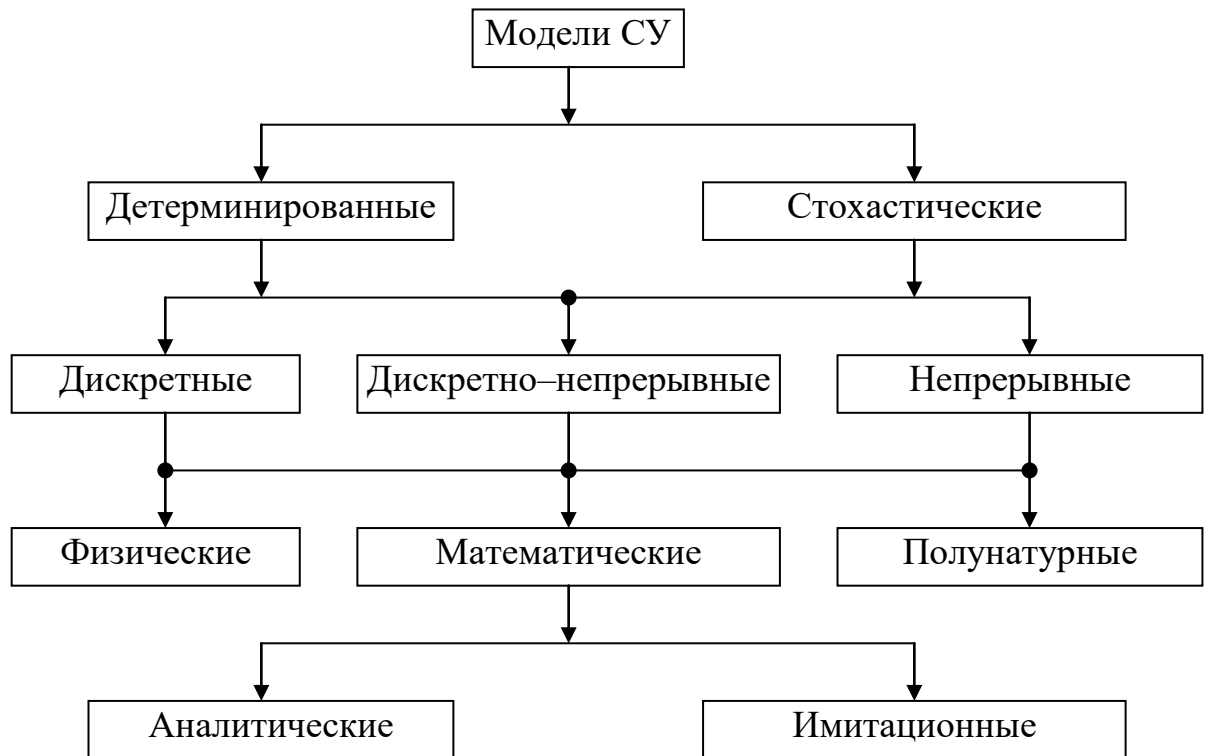
6. Принцип баланса точностей, т.е. соразмерности:

- а) погрешности задания параметров модели (из-за исходной неопределённости) с систематической погрешностью моделирования (отклонение модели от исходного описания системы);
- б) систематической погрешностью моделирования и случайной погрешности при интерпретации и усреднении результатов моделирования;
- в) точности моделирования отдельных элементов системы.

1.3. Классификация моделей систем управления по характеру и способам использования

Классификация моделей СУ приведена на рис.

Детерминированная модель отражает детерминированные процессы,



т.е. процессы СУ, в которой отсутствуют какие-либо случайные воздействия и явления.

Стохастическая модель отображает вероятностные процессы в СУ, обусловленные случайными воздействиями.

Дискретная модель описывается уравнениями, связывающими дискретные величины.

Дискретно-непрерывная модель описывается уравнениями, связывающими дискретные и непрерывные величины.

Полунатурная модель это такая модель, в которой наиболее громоздкая, дорогостоящая и опасная по аварийности часть системы, например, ОУ замещается моделью, а другая требующая настройки часть системы, например, аппаратура управления, берётся натурой. Частным случаем полунатурной модели являются тренажёры, в которых в качестве “натуры” выступает человек.

Физическая модель имеет ту же физическую природу, подчиняется тем же физическим законам и описывается такими же математическими зависимостями, что и моделируемый объект-оригинал. Физическая модель отличается от объекта-оригинала геометрическими размерами и диапазоном изменения своих переменных состояния, входных и выходных величин. Применяется физическая модель для исследования объектов с не полностью известным математическим описанием, когда натурный эксперимент неприемлем.

Математическая модель – это система математических соотношений описывающих изучаемые процессы в СУ. Математическая модель может быть аналитической или имитационной.

Аналитическая модель применяется тогда, когда исследуемые процессы в СУ можно описать аналитически в виде логических соотношений и(или) функциональных зависимостей (алгебраических, дифференциальных, разностных уравнений и т.п.).

Имитационная модель (ИМ) применяется тогда, когда характер протекающих в системе процессов не позволяет описать эти процессы в аналитической форме или когда необходимо исследовать поведение системы при различных сочетаниях значений её параметров и внешней среды. Имитационная модель воспроизводит алгоритм функционирования исследуемой системы во времени с учётом элементарных явлений протекающих в ней процессов и она предусматривает проведение статических экспериментов.

Для имитационной модели практически отсутствуют ограничения на область её применения. Однако ИМ имеет ряд недостатков:

- разработка ИМ требует, как правило, больших затрат времени и сил;
 - она менее “объективна”, чем аналитическая модель;
 - результаты имитационного моделирования всегда носят частный характер.
- Поэтому для получения обоснованных выводов требуется проведение целой серии модельных экспериментов.

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМ И ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

2.1. Основные формы математических моделей

В настоящее время известно два основных способа математического описания линейных и нелинейных САУ:

- с помощью уравнений, разрешённых относительно физических выходных переменных;
- с помощью уравнений, разрешённых относительно первых производных переменных состояния.

При описании систем в переменных входы-выходы связь между вектором выходных переменных \bar{u} и вектором выходных величин \bar{y} устанавливается с помощью оператора

$$\bar{y} = H \bar{u},$$

где \bar{y} – вектор столбец размерности $m \times 1$; \bar{u} – вектор столбец размерности $l \times 1$, а в состав оператора H могут входить символы операций алгебраических, функциональных преобразований, дифференцирования, интегрирования, получения конечных разностей и т.п.

В частности, для обыкновенных линейных стационарных систем оператор H представляет собой передаточную матрицу, т.е.

$$\bar{y} = W(p)\bar{u}, \quad (2.1)$$

где $\bar{y}(0) = 0$, $W(p)$ – передаточная матрица размерности $m \times l$, элементами которой являются передаточные функции $W_{ij}(p)$ между j -м входом и i -м выходом; p – оператор дифференцирования, $p \equiv d/dt$.

Математические модели систем в переменных “входы–выходы” имеют определённые достоинства. Это прежде всего их простота ясная связь с физической реальностью. Исследователь имеет дело с физическими переменными как в конечном результате моделирования, так и на промежуточных этапах. Зачастую он имеет возможность сочетать моделирование с натурным экспериментом.

К недостатком математических моделей в переменных “входы–выходы” относится то, что они не пригодны из-за вычислительных трудностей при исследовании сложных нелинейных и нестационарных СУ.

Математическое описание САУ в переменных состояния представляет собой векторное уравнение в форме Коши:

$$\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}, \bar{u}, t), \quad (2.2)$$

где \bar{x} – вектор состояния, компонентами которого являются переменные состояния x_1, x_2, \dots, x_n , причём вектор \bar{x} связан с вектором выходных величин \bar{y} функциональной зависимостью

$$\bar{y} = \varphi(\bar{x}, \bar{u}). \quad (2.3)$$

Для обыкновенных линейных стационарных систем уравнения (2.2) и (2.3) упрощаются:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u}, \quad \bar{y} = C\bar{x} + D\bar{u}. \quad (2.4)$$

Заметим, что уравнения (2.4) можно преобразовать к форме (2.1) при выполнении следующих двух условий эквивалентности.

Перейдём в (2.4) к изображениям Лапласа при нулевых начальных условиях:

$$s\bar{x}(s) = A\bar{x}(s) + B\bar{u}(s), \quad \bar{y}(s) = C\bar{x}(s) + D\bar{u}(s)$$

и выразив из первого уравнения изображение вектора

$$\bar{x}(s) = (sI_m - A)^{-1} B\bar{u}(s),$$

подставим его во второе уравнение.

Тогда получим

$$\bar{y}(s) = \{C(sI_m - A)^{-1} B + D\} \bar{u}(s),$$

где I_m – единичная $n \times n$ матрица, и, сравнивая полученное выражение с (2.1), найдём, что

$$W(s) = C(sI_m - A)^{-1} B + D, \quad (2.5)$$

где $\det(sI_m - A) \equiv 0$. (2.6)

Условие (2.6) – это первое из условий эквивалентности преобразования. Второе условие заключается в том, что для системы (2.4) должны выполняться условия управляемости и наблюдаемости. В противном случае передаточные функции $W_{ij}(s)$, как элементы передаточной матрицы $W(s)$ могут иметь одинаковые множители в числителе и знаменателе. Эти множители сокращаются и эквивалентность (2.1) и (2.4) нарушается.

2.2. Уравнения состояния непрерывных систем в канонических формах Жордана

Рассмотрим линейный стационарный односвязный объект (с одним входом и одним выходом), передаточная функция которого

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{m(s)}{d(s)}. \quad (2.7)$$

Случай 1: И пусть корни s_i ($i = \overline{1, n}$) характеристического полинома $d(s)$ – простые. Разложим $W(s)$ на сумму простых дробей, т.е.

$$W(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \sum_{i=1}^n \frac{m(s_i)}{d'(s_i)(s - s_i)},$$

и обозначим $m(s_i)/d'(s_i) = c_i$, $x_i(s) = \frac{1}{(s - s_i)} u(s)$.

Тогда переходя от изображений к оригиналам получим

$$y(s) = \sum_{i=1}^n c_i x_i, \quad \dot{x} = s_i x_i + u \quad i = \overline{1, n} \quad (2.8)$$

или в векторно–матричной форме

$$\dot{x} = A x + B u, \quad y = C x, \quad (2.9)$$

где B – единичный вектор–столбец размерности $n \times 1$, C – матрица–строка, $C = [c_1, c_2, \dots, c_n]$, а матрица A является диагональной

$$A = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & s_n \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Её диагональными элементами являются корни характеристического уравнения системы (рис. 2.1).

Если среди корней s_i имеются комплексные, то соответствующие переменные состояния также получаются комплексными. Поэтому рассмотренную форму математической модели используют для случаев только вещественных корней характеристического уравнения системы.

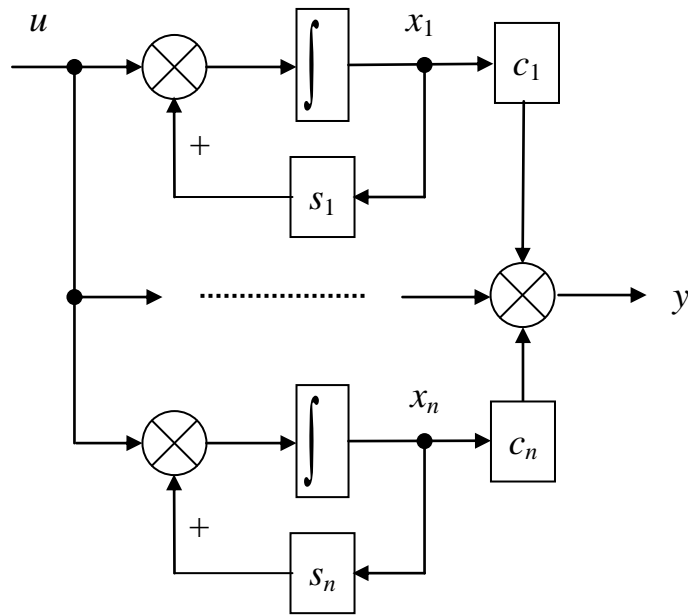


Рис. 2.1

Структурная схема САУ, соответствующая уравнениям (2.12) приведена на рис. 2.2.

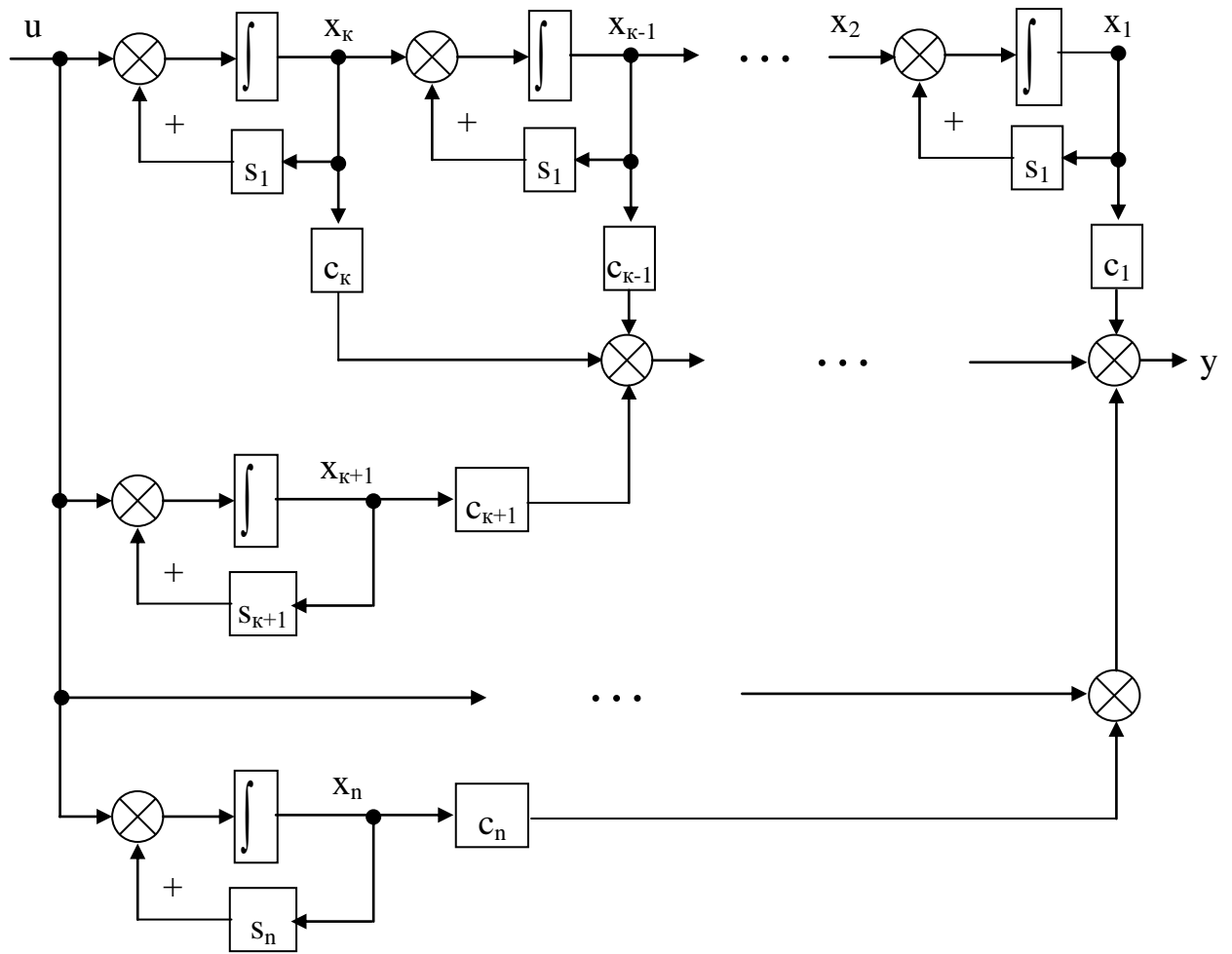


Рис. 2.2

Случай 2: Пусть теперь полином $d(s)$ имеет кратные корни. В этом случае разложение передаточной функции на сумму простых дробей имеет вид

$$W(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \sum_{i=1}^k \frac{c_i}{(s - s_1)^{k-i+1}} + \sum_{i=k+1}^n \frac{c_i}{(s - s_i)}, \quad (2.11)$$

где коэффициенты разложения c_i ($i = \overline{1, n}$) можно определить, например, методом неопределённых коэффициентов.

Если в (2.11) обозначить

$$x_i(s) = \begin{cases} \frac{1}{(s - s_1)^{k-i+1}} u(s), & \text{при } i = \overline{1, k}; \\ \frac{1}{(s - s_i)} u(s), & \text{при } i = \overline{k+1, n}, \end{cases}$$

то переходя от изображений к оригиналам получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_i &= s_1 x_i + x_{i+1} \quad \text{при} \quad i = \overline{1, k-1}; \\ \dot{x}_i &= s_1 x_k + u \quad \text{при} \quad i = k; \\ \dot{x}_i &= s_i x_i + u \quad \text{при} \quad i = \overline{k+1, n}; \\ y &= \sum_{i=1}^n c_i x_i \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

В векторно–матричной форме уравнения (2.12) имеют вид (2.9), но матрицы А и В записываются по–другому:

$$A = \left[\begin{array}{cccc|cccc} s_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & & & \\ 0 & s_1 & 1 & \dots & 0 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s_1 & & & \\ \hline & & & & & s_{k+1} & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & 0 & s_{k+2} & \dots & 0 \\ & & & & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & 0 & 0 & \dots & s_n \end{array} \right]; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Матрица А в (2.10) и (2.13) имеет так называемую каноническую форму Жордана, так как элементы её главной диагонали являются корнями характеристического полинома передаточной функции.

2.3. Уравнения состояния непрерывных систем в нормальной форме (форме фазовых переменных)

Уравнения нелинейных, линейных стационарных и нестационарных односвязных систем, разрешённые относительно старшей производной выходной величины,

$$y^{(n)} = f(t, k, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}), \quad (2.14)$$

сразу приводятся к так называемой нормальной форме элементарной подстановкой

$$y = x_1, \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dots, \quad \dot{x}_{n-1} = x_n, \quad \dot{x}_n = x_1^{(n)}. \quad (2.15)$$

Действительно, подставив (2.15) в (2.14), получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_i &= \begin{cases} x_{i+1} & \text{при} \quad i = \overline{1, n-1}; \\ f(t, u, x_1, \dots, x_n) & \text{при} \quad i = n; \end{cases} \\ y &= x_1. \end{aligned} \right\}$$

Здесь x_i ($i = \overline{1, n}$) – фазовые координаты.

В случае линейной стационарной односвязной системы с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}, \quad m \leq n,$$

её можно представить в виде последовательного соединения двух звеньев с выходной величиной первого звена x_1 , т.е.

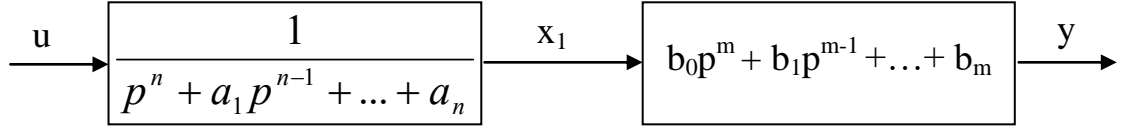


Рис. 2.3.

Схеме рис. 2.3 соответствует система двух уравнений

$$\begin{aligned} (p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n)x_1 &= u; \\ y &= (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m)x_1. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Если теперь ввести в (2.16) аналогичные (2.15) обозначения:

$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = x_3, \dots, \dot{x}_{n-1} = x_n$ и $\dot{x}_n = x_1^{(n)}$, то получим математическую модель системы в нормальной форме

$$\dot{x}_i = \begin{cases} x_{i+1} & \text{при } i = \overline{1, n-1}; \\ -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n + u & \text{при } i = n; \end{cases} \quad (2.17)$$

$$y = (b_m - b_0 a_n)x_1 + (b_{m-1} - b_0 a_{n-1})x_2 + \dots + (b_1 - b_0 a_1)x_n + b_0 u.$$

Или в векторно-матричной форме

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= A\bar{x} + Bu; \\ y &= c\bar{x} + du, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & \dots & -a_1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$c = [b_m - b_0 a_n, b_{m-1} - b_0 a_{n-1}, \dots, b_1 - b_0 a_1]; \quad d = b_0.$$

Структурная схема соответствующая уравнениям (2.17), (2.18) приведена на рис. 2.4

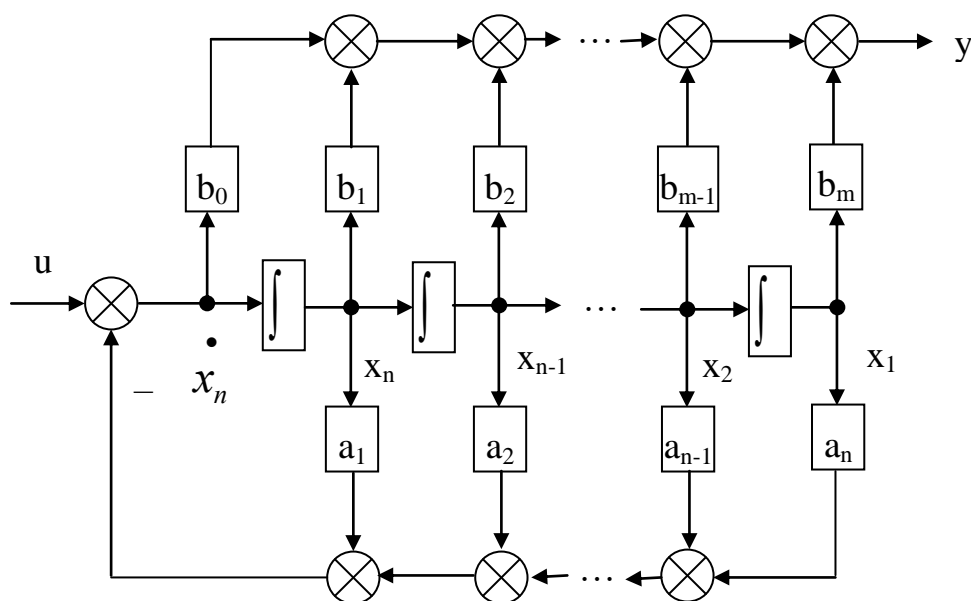


Рис. 2.4.

2.4. Уравнения с переменными состояния в виде линейных комбинаций ВХОДНЫХ И ВЫХОДНЫХ ВЕЛИЧИН

Рассмотрим структурную схему линейной стационарной односвязной системы, приведённой на рис. 2.5

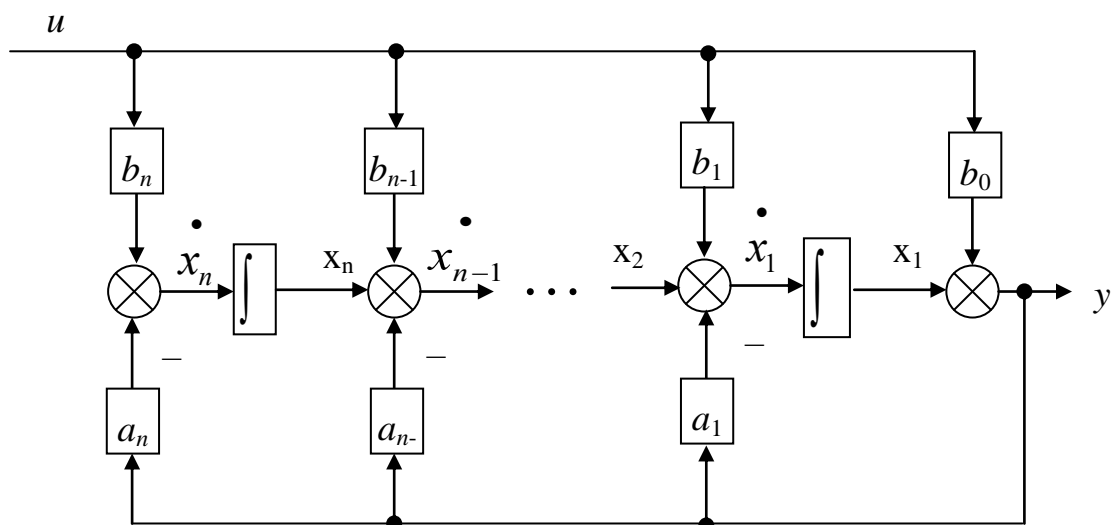


Рис. 2.5.

Двигаясь от выхода к входу этой системы можно получить, что

$$y = b_0 u + \int (b_1 u - a_1 y + \int (b_2 u - a_2 y + \dots + \int (b_n u - a_n y) dt) \dots dt) dt .$$

Дифференцируя полученное выражение “n” раз, находим соответствующее рассматриваемой системе дифференциальное уравнение:

$$(p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) y = (b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_n) u .$$

За переменные состояния этой системы можно принять выходные величины интеграторов. Тогда

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_i &= \begin{cases} -a_i x_1 + x_{i+1} + (b_i - a_i b_0)u & \text{при } i = \overline{1, n-1}; \\ -a_n x_1 - (b_n - a_n b_0)u & \text{при } i = n; \end{cases} \\ y &= x_1 + b_0 u. \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

Векторно–матричная форма записи уравнений (2.19) аналогична (2.18), но матрицы A , B и c будут уже другими:

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 b_0 \\ b_2 - a_2 b_0 \\ \dots \\ b_n - a_n b_0 \end{bmatrix};$$

$$c = [1, 0, 0, \dots, 0]; \quad d = b_0.$$

2.5. Уравнения состояния многосвязных непрерывных систем

Как правило, такие системы состоят из блоков с передаточными функциями $W_i(s)$. Каждый из блоков имеет только один выход z_i и один вход, который формируется в виде суммы одного внешнего воздействия u_i и любого числа выходных переменных z_j других блоков. Следовательно многосвязную систему можно рассматривать как децентрализованную по входам систему, состоящую из подсистем $W_i(s)$.

Алгоритм получения уравнений состояния таких систем аналогичен рассмотренным в п.п. 2.2–2.4. Например, в соответствии с алгоритмом п.2.4 на основании заданных выражений для выходных величин системы y_j сначала составляется структурная схема из интеграторов и жёстких прямых и обратных связей. В частности, если

$$y_j = \begin{cases} \frac{b_{01}p + b_{11}}{p + a_{11}}u_1 + \frac{b_{13}}{p + a_{13}}u_2 & \text{при } j = 1; \\ \frac{b_{12}}{(p + a_{12})p}u_1 & \text{при } j = 2; \\ \frac{b_{12}}{p + a_{12}}u_1 + \frac{b_{13}}{p + a_{13}}u_2 & \text{при } j = 3, \end{cases} \quad (2.20)$$

то системе (2.20) соответствует структурная схема, представленная на рис.2.6

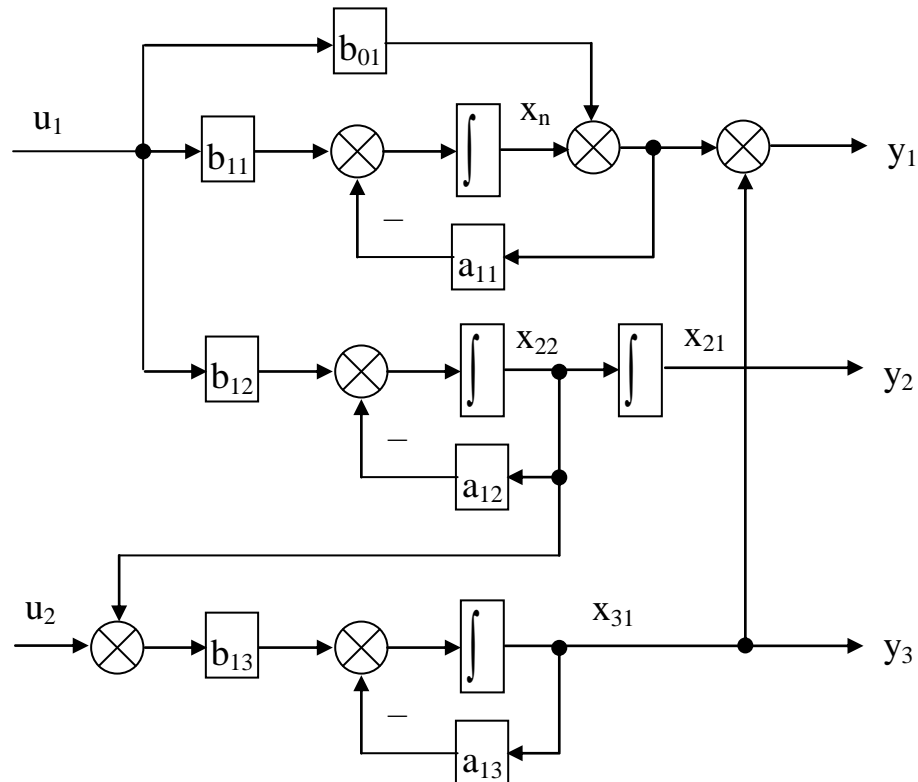


Рис. 2.6

Выходные величины интеграторов этой схемы принимаются за переменные состояния. И далее по схеме двигаясь от j -го выхода к i -му входу записываются уравнения состояния

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_{11} &= -a_{11}x_{11} + (b_{11} - a_{11}b_{01})u_1; \\ \dot{x}_{21} &= x_{22}; \\ \dot{x}_{22} &= -a_{12}x_{22} + b_{12}u_1; \\ \dot{x}_{31} &= -a_{13}x_{31} + b_{13}x_{22} + b_{13}u_2, \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

и уравнения выхода

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= x_{11} + x_{31} + b_{01}u_1; \\ y_2 &= x_{21}; \\ y_3 &= x_{31}. \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

Векторно-матричная форма записи уравнений (2.21), (2.22)

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= A\bar{x} + B\bar{u}, & \bar{y} &= C\bar{x} + D\bar{u} \end{aligned}$$

отличается тем, что матрицы B , C и D имеют размерность соответственно 4×2 , 3×4 и 3×2 , т.е.

$$A = \begin{bmatrix} -a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & b_{13} & -a_{13} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} - a_{11}b_{01} & 0 \\ 0 & 0 \\ b_{12} & 0 \\ 0 & b_{13} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} b_{01} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{31} \end{bmatrix}.$$

2.6. Уравнения состояния дискретных систем в канонических формах Жордана

В общем случае разностное уравнение стационарной односвязной линейной, дискретной системы (корректирующего устройства) имеет вид:

$$y[k] + a_1 y[k-1] + \dots + a_n y[k-n] = b_0^* u[k] + b_1^* u[k-1] + b_n^* u[k-n], \quad (2.23)$$

или, если ввести обозначение оператора запаздывания e^{-ipT} на i периодов квантования, то уравнение (2.23) примет вид

$$\sum_{i=0}^n a_i e^{-ipT} y[k] = \sum_{i=0}^n b_i^* e^{-ipT} u[k], \quad (2.24)$$

где $a_0 = 1$.

Уравнению (2.23) соответствует передаточная функция

$$W^*(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\sum_{j=0}^n b_j^* z^j}{\sum_{i=0}^n a_i z^i}. \quad (2.25)$$

Для её разложения на простые дроби требуется, чтобы степень числитель была по крайней мере на единицу меньше степени знаменателя. Поэтому сначала преобразуем (2.25), выделив в ней целую часть

$$W^*(z) = \frac{b_n^*}{a_n} + \frac{\sum_{j=0}^{n-1} b_j^* z^j}{\sum_{i=0}^n a_i z^i} = \frac{b_n^*}{a_n} + W(z).$$

Если теперь разложить $W(z)$ на простейшие дроби, то для изображения выхода, получим (в случае действительных корней)

$$Y(z) = \frac{b_n^*}{a_n} U(z) + \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{z - z_i} U(z). \quad (2.26)$$

Или, если ввести обозначение

$$x_i(z) = \frac{1}{z - z_i} U(z), \quad (2.27)$$

$$Y(z) = \frac{b_n^*}{a_n} U(z) + \sum_{i=1}^n c_i x_i(z). \quad (2.28)$$

Соотношениям (2.27) и (2.28) соответствует уравнение состояния системы (корректирующего устройства)

$$\bar{x}[k+1] = A \bar{x}[k] + Bu[k], \quad (2.29)$$

и уравнение её выхода

$$y[k] = c \bar{x}[k] + du[k], \quad (2.30)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & z_n \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}; \quad d = \frac{b_n^*}{a_n};$$

$$c = [c_1, c_2, \dots, c_n]; \quad \bar{x}[k] = \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ \dots \\ x_n[k] \end{bmatrix}.$$

Заметим, что для физически реализуемой системы $d = 0$, так как степень числителя её передаточной функции должна быть меньше степени знаменателя. У корректирующего устройства указанные степени могут быть равными.

Структурная схема дискретной системы, соответствующая уравнениям (2.29), (2.30), приведена на рис. 2.7:

Аналогично преобразованиям п. 2.2 в случае кратных полюсов передаточной функции системы (строительства)

$$W^*(z) = \frac{b_n^*}{a_n} + \sum_{i=1}^k \frac{c_i}{(z - z_1)^{k-i+1}} + \sum_{i=k+1}^n \frac{c_i}{z - z_i}$$

можно получить векторно-матричную форму уравнений состояния и выхода системы, подобную (2.29), (2.30).

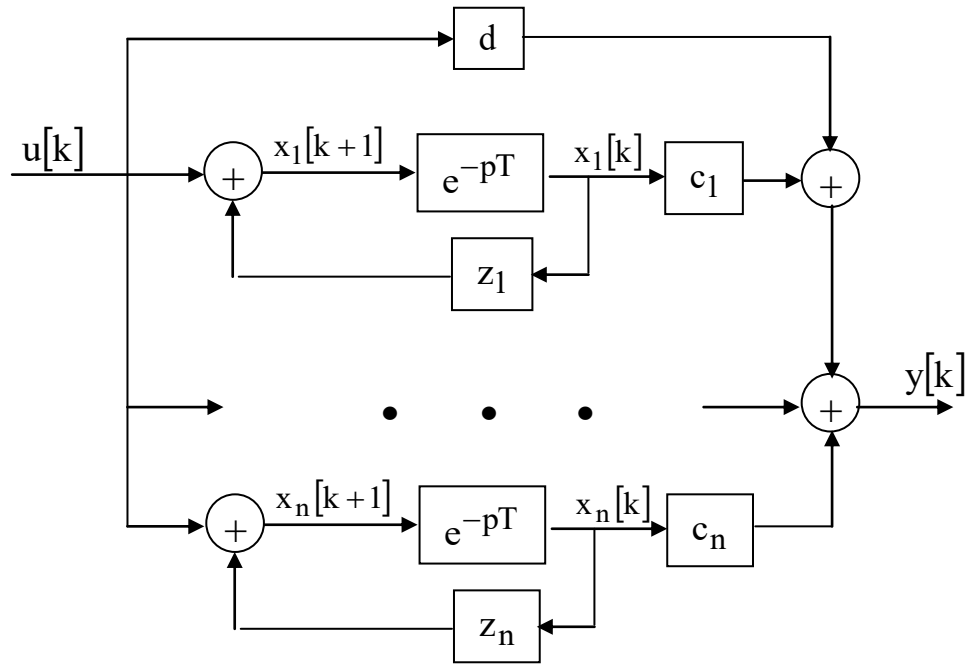


Рис. 2.7

Причем матрицы A и B будут иметь следующий вид:

$$A = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} z_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & & & & & \\ 0 & z_1 & 1 & \dots & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & z_1 & \dots & 0 & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & z_1 & & & & & \\ \hline & & & & & 0 & & & & \\ & & & & & z_{k+1} & 0 & \dots & 0 & \\ & & & & & 0 & z_{k+2} & \dots & 0 & \\ & & & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & & & & & 0 & 0 & \dots & z_n & \end{array} \right] \quad B = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \right]$$

Таким образом, можно сделать вывод о том, что уравнения состояния, структурные схемы и способы перехода от уравнений вход-выход для дискретных и непрерывных систем весьма сходны.

2.7. Каноническая декомпозиция дискретных систем и соответствующие формы их уравнений состояния

В стационарной линейной системе в общем случае можно выделить 4 частные подсистемы (рис 2.8):

A – достижимая и наблюдаемая; B – достижимая и ненаблюдаемая;

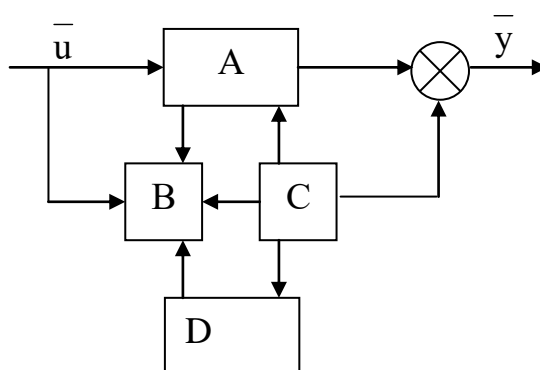


Рис. 2.8

C – недостижимая и наблюдаемая; D – недостижимая и ненаблюдаемая.

Такое разделение САУ на подсистемы называют канонической декомпозицией.

Определение 1: Состояние $\bar{x}(t_1)$ линейной системы *достижимо*, если существует такое управление $\bar{u}(t)$, которое переводит ее из начального состояния $\bar{x}(t_0) = 0$ в желаемое $\bar{x}(t_1)$ за конечный интервал времени $t_1 - t_0$.

Определение 2: Состояние $\bar{x}(t_1)$ линейной системы *управляемо*, если существует такое управление $\bar{u}(t)$, которое переводит ее из состояния $\bar{x}(t_1)$ в состояние $\bar{x}(t_2) = 0$ при условии, что интервал времени $t_2 - t_1$ конечен.

Определение 3: Состояние $\bar{x}(t_0)$ системы *наблюдаемо*, если оно может быть определено по будущим значениям выходной переменной $y(t)$, при условии, что интервал $t - t_0$ конечен.

Определение 4: Состояние $\bar{x}(t_0)$ системы *восстанавливаемо*, если оно может быть определено по прошлым значениям выходной переменной $y(t)$ при условии, что интервал $t_0 - t$ конечен.

Уравнения состояния с матрицей Жордана A_j позволяет непосредственно по виду матриц B_j и C_j судить о достижимости и наблюдаемости системы. В частности, САУ является достижимой и наблюдаемой, если все элементы матриц B_j и C_j отличны от нуля.

Недостатком канонической формы Жордана является то, что для перехода к ней необходимо вычисление корней характеристического уравнения САУ.

Поэтому для численных расчетов и моделирования систем иногда удобнее применять другие канонические формы математических моделей. Это уравнения состояния систем в канонических формах достижимости, управляемости, наблюдаемости и восстанавливаемости. Эти формы называются каноническими в силу их простоты и непосредственной связи элементов матрицы, математической модели системы с коэффициентами разностного уравнения последней в переменных вход-выход.

2.8. Математическая модель в канонической форме достижимости

Уравнения состояния и выхода системы в этой форме могут быть записаны на основании ее структурной схемы, представленной на рис.2.9.

В частности,

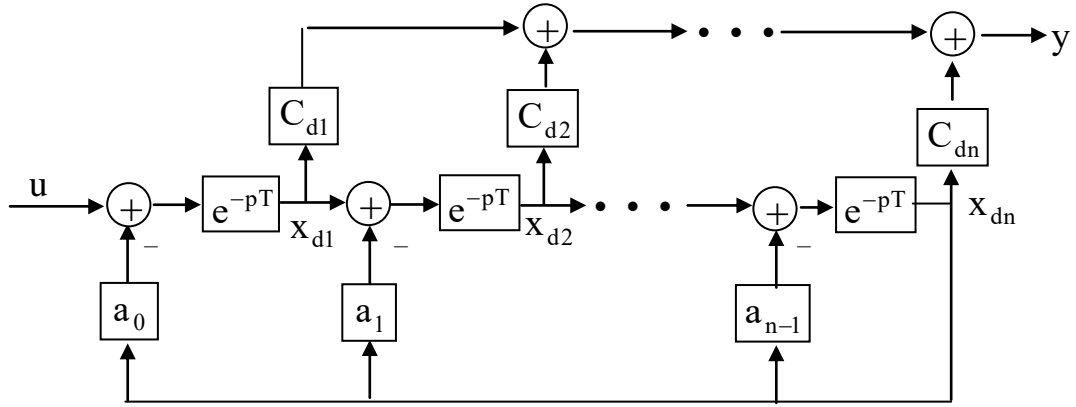


Рис. 2.9

$$\begin{aligned}
 x_1[k+1] &= -a_0 x_n[k] + u[k]; \\
 x_2[k+1] &= -a_1 x_n[k] + x_1[k]; \\
 &\vdots \\
 x_n[k+1] &= -a_{n-1} x_n[k] + x_{n-1}[k]; \\
 y[k] &= C_{d1}x_1[k] + C_{d2}x_2[k] + \dots + C_{dn}x_n[k].
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

в векторно-матричной форме уравнения (2.31) записывается следующим образом:

$$\bar{x}_d[k+1] = A_d \bar{x}_d[k] + B_d u[k], \quad y[k] = C_d \bar{x}_d[k], \tag{2.32}$$

$$\text{где } A_d = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \dots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}; \quad B_d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

причем матрица A_d называется матрицей Фробениуса.

Отметим некоторые особенности канонической формы достижимости:

1. Передаточная функция системы, которая описывается уравнениями (2.31), (2.32) имеет вид

$$\Phi(z) = \frac{b_0 + b_1 z + \dots + b_{n-1} z^{n-1}}{a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n} \cdot (2.33)$$

Коэффициенты ее знаменателя непосредственно являются элементами матрицы A_d .

2. Матрица достижимости системы является единичной

$$Q_d = [B_d, A_d B_d, \dots, A_d^{n-1} B_d] = I_m \quad (2.34)$$

3. Любая достижимая система может быть преобразована в каноническую форму достижимости с помощью матрицы преобразования Q , причем $x = Q x_d$, $AQ = QA_d$, в частности, если система описывается тройкой матриц (A, B, C) , то

$$Q = Q_d Q_d^{-1} = Q_d = [B, AB, \dots, A^{n-1} B] \quad (2.35)$$

- элементы a_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$) матрицы A_d могут быть определены при вычислении определителя $|z I_m - A|$;
- вектор B_d предполагается известным;
- а матрицу выхода можно найти из выражения

$$C_d = C Q = [CB, CAB, \dots, CA^{n-1} B]$$

4. Элементы всех матриц являются действительными.

2.9. Математическая модель в канонической форме управляемости

Уравнения состояния и выхода системы в этой форме могут быть записаны на основании ее структурной схемы, представленной на рис.2.10:

В частности, уравнения состояния выхода и входа:

$$\begin{aligned} \bar{x}_u[k+1] &= A_u \bar{x}_u[k] + B_u u[k] \\ y[k] &= C_u \bar{x}_u[k] + d_u[k] \end{aligned} \quad (2.36)$$

где: $d_u = b_n$; $C_u = [b_0, b_1, \dots, b_{n-1}]$

$$A_u = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}; \quad B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Причем элементы матриц A_u и C_u являются коэффициентами передаточной функции системы (2.33), в которой $b_n \neq 0$.

Основные особенности канонической формы управляемости:

1. Матрица достижимости имеет вид нижней треугольной матрицы.

$$Q_{ud} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & * & \dots & * & * \end{bmatrix}$$

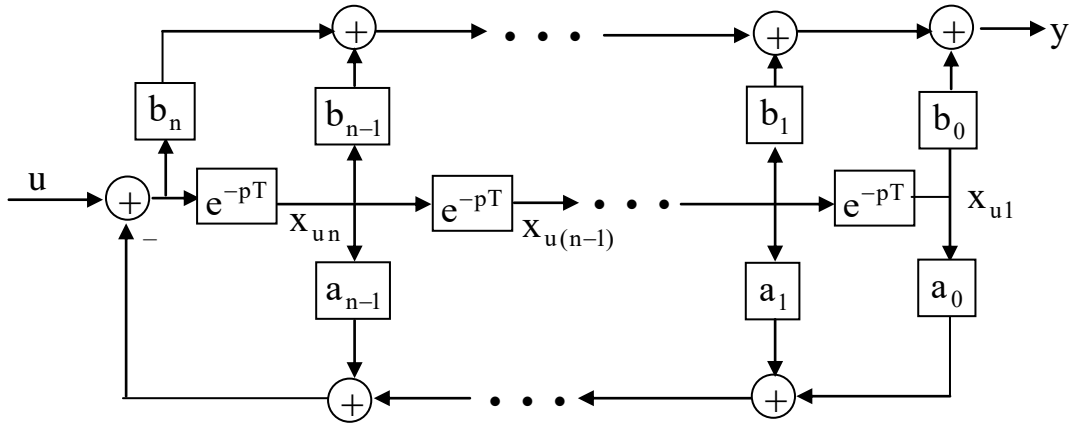


Рис. 2.10

2. Матрица преобразования Q , которая позволяет преобразовать систему с тройкой (A, B, C) в каноническую форму управляемости, может быть рекуррентно по столбцам:

$$\bar{x} = Q \bar{x}_u = [q_1, q_2, \dots, q_n] x_u, \quad AQ = QA_u$$

Откуда

$$[Aq_1, Aq_2, \dots, Aq_n] = [-q_n a_0, q_1 - q_n a_1, \dots, q_{n-1} - q_n a_{n-1}] \quad (2.37)$$

Но так как вектор b_u известен, то $B = QB_u = q_n$ и далее можно продолжить вычисления по отдельным столбцам (2.37) справа налево:

$$\left. \begin{aligned} q_n &= B, & q_{n-1} &= Aq_n + a_{n-1} q_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_1 &= Aq_2 + a_1 q_n, & 0 &= Aq_1 + a_0 q_n \end{aligned} \right\}$$

причем последнее равенство служит для контроля.

Элементы a_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$) матрицы A_u могут быть найдены при вычислении определителя $|zI_m - A|$. А матрицу выхода можно найти из выражения:

$$C_u = CQ.$$

2.10. Математическая модель в канонической форме наблюдаемости

Этой форме соответствует структурная схема, представленная на рис.2.11,

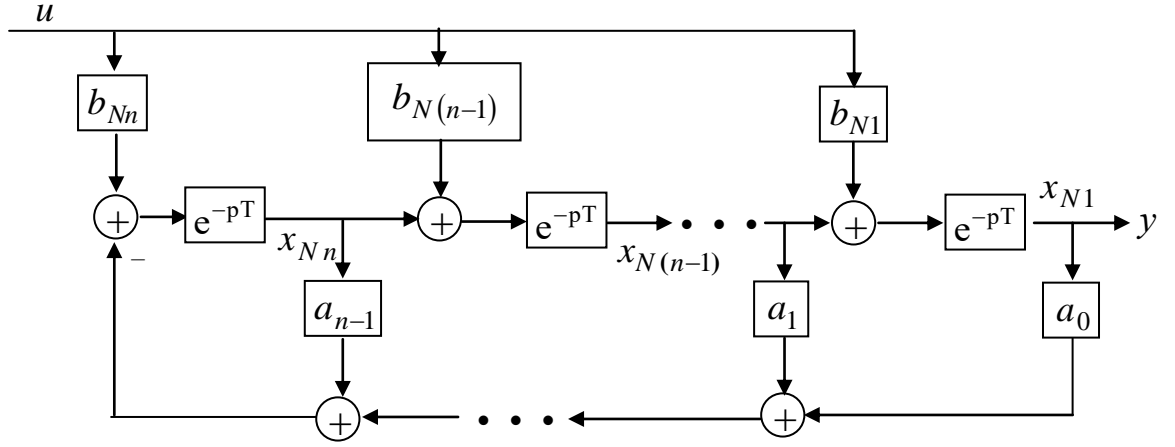


Рис. 2.11

и уравнения
$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_N[k+1] &= A_N \bar{x}_N[k] + B_N u[k] \\ y[k] &= C_N x_N[k] \end{aligned} \right\} \quad (2.38)$$

де $A_N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}; \quad B_N = \begin{bmatrix} b_{N1} \\ b_{N2} \\ \vdots \\ b_{Nn} \end{bmatrix}; \quad C_N = [1, 0, \dots, 0].$

Основные свойства канонической формы наблюдаемости:

1. Она дуальна к канонической форме достижимости, т.е. $A_N = A_d^T$; $B_N = C_d$ и $C_N = B_d$.
2. Коэффициенты a_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$) знаменателя передаточной функции системы (2.33) непосредственно совпадают с элементами матрицы A_N .

3. Матрица наблюдаемости является единичной, т.е. $Q_{NN} = \begin{bmatrix} C_N \\ C_N A_N \\ \vdots \\ C_N A_N^{n-1} \end{bmatrix} = I$.

4. Если система определяется тройкой (A, B, C) , то каноническая форма наблюдаемости вычисляется с помощью преобразования $\bar{x}_N = Q_N x$, где

матрица преобразования $Q_N = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$

Элементы матрицы A_N могут быть найдены опять при вычислении определителя $|zI_m - A|$.

А вектор B_N вычисляется с помощью матрицы Q_N :

$$B_N = Q_N B = \begin{bmatrix} CB \\ CAB \\ \dots \\ CA^{n-1}B \end{bmatrix}$$

2.11. Математическая модель в канонической форме восстанавливаемости

Этой форме соответствует следующая структурная схема, представленная на рис.2.12,

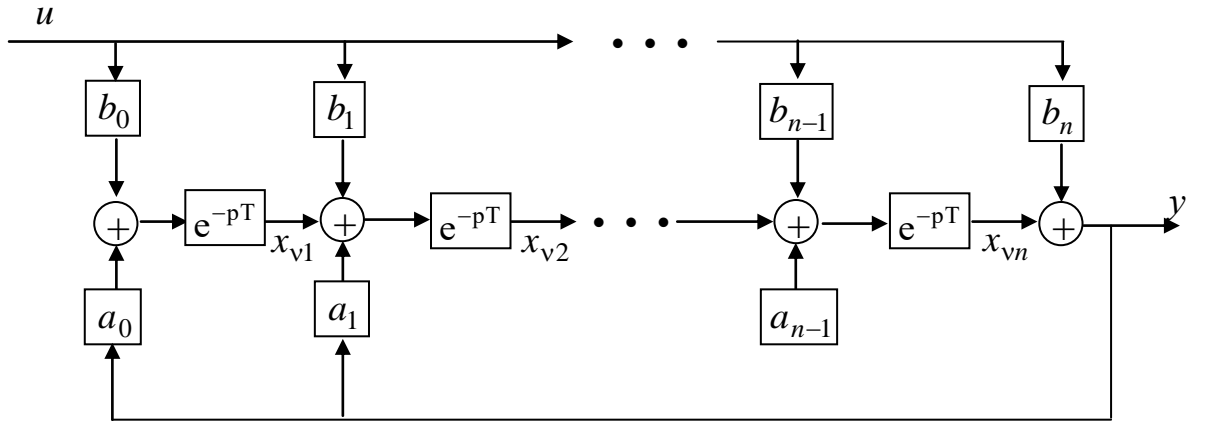


Рис. 2.12

и уравнения

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_v[k+1] &= A_v \bar{x}_v[k] + B_v u[k] \\ y[k] &= C_v \bar{x}_v[k] + b_n u[k] \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

где $C_v = [0, \dots, 0, 1]$;

$$A_v = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \dots & 0 & -a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}; \quad B_v = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \dots \\ b_{n-1} \end{bmatrix};$$

причем элементы матриц A_v и B_v являются коэффициентами передаточной функции системы (2.33), в которой $b_n \neq 0$.

Основные свойства канонической формы восстанавливаемости:

1. Она дуальна к канонической форме управляемости, т.е. $A_v = A_u^T$,
 $B_v = C_u$, $C_v = B_u$.
2. Если система задана тройкой (A, B, C) , то с помощью подстановки $\bar{x} = Q x_v$, где $Q = T^{-1}$, она может быть преобразована в каноническую

форму восстанавливаемости. Учитывая, что $T = [t_1, t_2, \dots, t_n]^T = \begin{bmatrix} t_1^T \\ t_2^T \\ \dots \\ t_n^T \end{bmatrix}$, а

также что матрица C_v известна, то $C = C_v$, $T = t_n^T$.

Следующие строки матрицы преобразования T можно определить из соотношений: $AQ = QA_v$; $TA = A_v T$, то есть:

$$\begin{bmatrix} t_1^T \\ t_2^T \\ \dots \\ t_n^T \end{bmatrix} A = A_v \begin{bmatrix} t_1^T \\ t_2^T \\ \dots \\ t_n^T \end{bmatrix} \quad \text{или что то же самое}$$

$$\begin{bmatrix} t_1^T A, t_2^T A, \dots, t_n^T A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_0 t_n^T, t_1^T - a_1 t_n^T, \dots, t_{n-1}^T - a_{n-1} t_n^T \end{bmatrix}$$

Если теперь в последнем уравнении приравнять последовательно справа налево элементы матриц, то получим:

$$\left. \begin{aligned} t_{n-1}^T &= t_n^T A + a_{n-1} t_n^T, & t_{n-2}^T &= t_{n-1}^T A + a_{n-2} t_n^T, \\ \dots & & \dots & \\ t_1^T &= t_2^T A + a_1 t_n^T, & 0 &= t_1^T A + a_0 t_n^T \end{aligned} \right\}$$

причем последнее равенство служит для контроля.

Элементы матрицы A_v можно определить при вычислении характеристического полинома $|zI_m - A|$. А матрицу B_v можно найти из соотношения $B_v = TB$.

3. МЕТОДЫ УПРОЩЕНИЯ, ЗАДАЧИ И ЦЕЛИ ИССЛЕДОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

3.1. Методы декомпозиции и редукции

Исходные математические модели (ММ), как правило, являются избыточными в смысле их приближения. Они содержат множество «лишних» элементов, что усложняет процесс моделирования и ведет к росту затрат времени на его проведение. Поэтому на первом этапе моделирования проводится разумное упрощение исходного математического описания системы.

К основным методам упрощения моделей, позволяющим преобразовать исходную математическую модель M в упрощенную M_i , (эквивалентную исходной модели M с точки зрения цели исследования), относятся две группы методов:

1. Методы декомпозиции
2. Методы редукции

В первой группе методов предусматривается возможность разделения исходной ММ на ряд частных моделей M_i меньшей сложности, то есть

$$M = \{M_1, M_2, \dots, M_n\}, \quad C(M_i) < C(M). \quad (3.1)$$

При этом разделение модели M может производиться на частные модели M_i по ее структуре, этапам времени работы, режимам работы.

Причем для каждой i -й модели ставится своя цель исследования. Тем самым исследование исходной ММ заменяется исследованием n более простых частных моделей M_i , и по этим результатам исследования частных моделей судят о свойствах системы в целом.

Во второй группе методов предполагается, что исходная математическая модель M последовательно редуцируется к упрощенным моделям M_i меньшей сложности $C(M_i)$, то есть:

$$M \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow \dots \rightarrow M_n, \quad C(M_i) < C(M) \quad (i = \overline{1, n}) \quad (3.2)$$

Причем цель исследования для каждой i -й модели совпадает с целью исследования для исходной ММ.

Заметим, что при редукции математической модели M отдельные элементы исходного математического описания, не влияющие или мало влияющие на выбранный ПЭ могут просто исключаться из модели. А другие могут заменяться упрощенными эквивалентами. И в частности, например, характеристики возмущающих воздействий в общем случае зависят от многочисленных факторов, в том числе и от результата взаимодействия с самой исследуемой системой. Поэтому при моделировании для имитации таких воздействий достаточно часто используется случайный эквивалент. Или может выбираться наихудший по отношению к системе вариант воздействия.

Известен также метод возмущений, который основан на том, что некоторые динамические связи в ММ могут игнорироваться и поэтому она может

быть аппроксимирована упрощенной моделью. В частности, математическое описание сингулярно возмущенной системы можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= A_{11} \bar{x}_1 + A_{12} \bar{x}_2 + B_1 \bar{u}_1 \\ \mu \dot{\bar{x}}_2 &= A_{21} \bar{x}_1 + A_{22} \bar{x}_2 + B_2 \bar{u}_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

где: μ – малый параметр.

Полагая $\mu = 0$, получим:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}) \bar{x}_1 + B_1 \bar{u}_1 - A_{12} A_{22}^{-1} B_2 \bar{u}_2 ; \\ \bar{x}_2 &= -A_{22}^{-1} (A_{21} \bar{x}_1 + B_2 \bar{u}_2). \end{aligned}$$

Таким образом, при $\mu = 0$ второе уравнение системы (3.3) вырождается в алгебраическое, а порядок и сложность ММ снижаются.

Наиболее распространенными методами упрощения нелинейных ММ являются гармоническая и статическая линеаризации. Во многих случаях линеаризованная ММ достаточно хорошо отражает физику работы исследуемой системы. Благодаря этому линеаризация позволяет применить при моделировании мощный аппарат исследования линейных систем.

Иногда моделируемая система имеет в своем составе некоторые относительно изолированные подсистемы, которые описываются нелинейными дифференциальными уравнениями:

$$\dot{\bar{y}} = F(\bar{y}, \bar{\Lambda}, t) \quad (3.4)$$

где: \bar{y} – вектор фазовых координат; $\bar{\Lambda}$ – вектор, составленный из параметров подсистемы, включая входные сигналы и начальные условия.

Упростить ММ исследуемой системы в этом случае можно с помощью машинно-аналитического метода. Этот метод предусматривает аппроксимацию аналитическими функциями предварительно полученных на ЭВМ решений уравнений (3.4):

$$\bar{y} = \Phi(\bar{s}, t) \quad (3.5)$$

где: \bar{s} – вектор параметров аппроксимирующих функций, например, это параметры α и ω в аппроксимирующей функции $\Phi = e^{\alpha t} \sin \omega t$.

Если подставить (3.5) в исходные уравнения (3.4), то можно получить аналитическую зависимость;

$$\Phi(\bar{s}, \bar{\Lambda}, t) = 0, \quad (3.6)$$

между параметрами подсистемы $\bar{\Lambda}$ и параметрами протекающих в ней процессов \bar{s} .

Уравнения (3.6) являются алгебраическими. Они проще, чем исходные дифференциальные (3.4). Именно этим и достигается упрощение исходной ММ.

3.2. Задачи и цели исследования ММ

Общая цель исследования ММ – это, во-первых, определение значений показателя эффективности (ПЭ) системы для различных вариантов ее структуры, параметров и возмущающих воздействий, а во-вторых, выбор варианта с экстремальным или допустимым значением ПЭ.

ПЭ в общем случае является функцией трех факторов:

- точности процесса управления (q);
- затрат ресурсов на управление (c);
- длительности процесса управления (t),

то есть:

$$J_{\Xi} = J(q, c, t) \quad (3.7)$$

В частном (конкретном) случае список аргументов в выражении (3.7) может видоизменяться. Например, если эффективность процесса управления не зависит от его длительности, то фактор времени может быть опущен. И наоборот, факторы наиболее существенные, могут быть детализированы, то есть преобразованы в векторные.

Алгоритм реализации общей цели моделирования, то есть алгоритм решения задачи исследования ММ представлен на рис. 3.1.

Задачи исследования ММ систем управления можно разделить на следующие группы:

1. Прямые задачи анализа.

а) заданы структура, параметры системы и возмущающие воздействия. Требуется определить реакцию системы на заданные воздействия и характеристики этой реакции (ПЭ);

б) заданы возмущающие воздействия и варианты структуры системы. Требуется выбрать вариант с наилучшим значением.

2. Обратные задачи анализа.

Известны структура, параметры и реакция системы. Необходимо найти возмущающее воздействие, вызвавшее данную реакцию.

3. Задачи регрессионного анализа.

Заданы возмущающие воздействия, структура и варьируемые параметры САУ. Необходимо найти функциональную зависимость (уравнение регрессии) между ПЭ и варьируемыми параметрами.

4. Задачи параметрической оптимизации модели.

Известны возмущающие воздействия и структура системы. Требуется найти такие параметры модели САУ, при которых ПЭ имеет экстремальное значение.

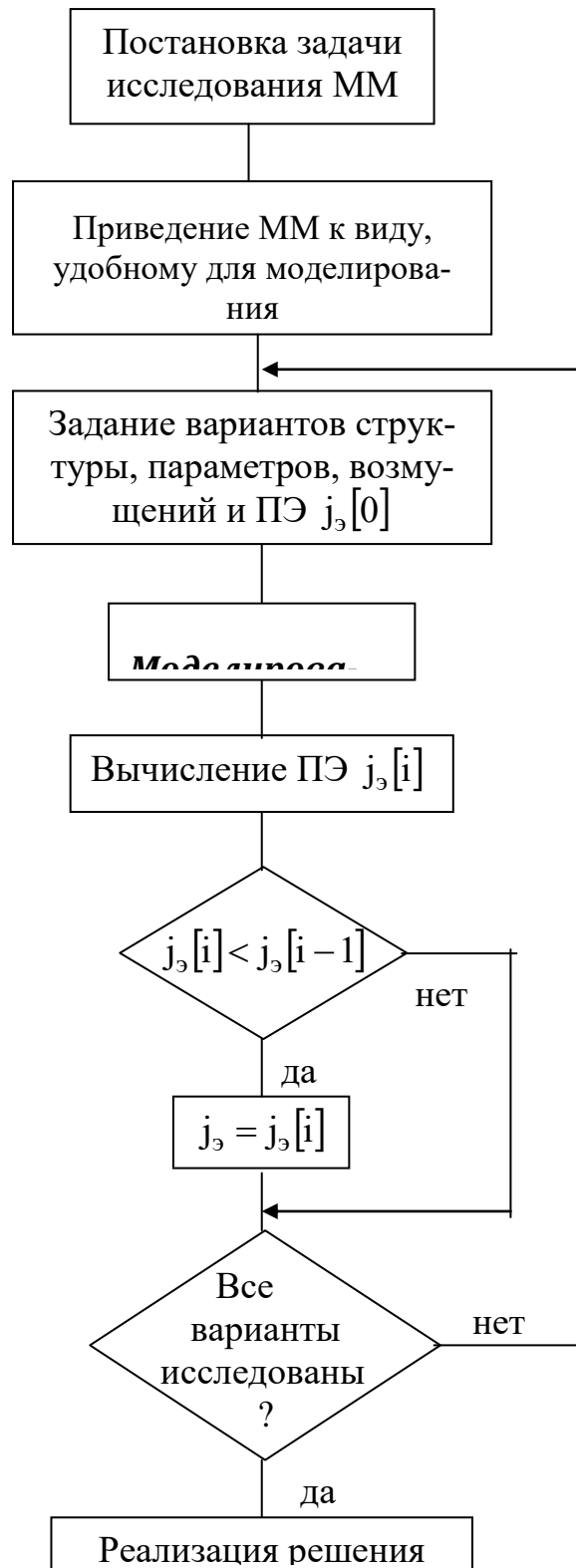


Рис. 3.1

4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

4.1. Особенности математического моделирования на цифровых, аналоговых и гибридных ЭВМ

Математическое моделирование осуществляется на цифровых, аналоговых и гибридных ЭВМ.

АВМ удобно применять тогда, когда моделируемая система описывается дифференциальными уравнениями с малым количеством функциональных и логических зависимостей.

ЦВМ удобно применять для исследования сложных систем с большим числом нелинейных и логических операций.

Гибридные ЭВМ (аналого-цифровые вычислительные комплексы (АЦВК)) используются для моделирования таких задач, которые могут быть разделены на две части, одна из них наиболее удобна для решения на АВМ, а другая – на ЦВМ. Тенденция к использованию АЦВК обусловлена еще и тем, что АВМ и ЦВМ имеют свои достоинства и недостатки.

Основные свойства АВМ и ЦВМ отражены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

АВМ	ЦВМ
1.1. Непрерывная форма представления переменных.	1.2. Цифровая форма представления переменных.
2.1. Операции выполняются параллельно.	2.2. Операции выполняются последовательно.
3.1. Время решения не зависит от объема вычислений.	3.2. Время решения зависит от сложности решаемой задачи.
4.1. Недостаточно высокая точность решения. Зависит от неустойчивости свойств основных элементов и не влияет на время решения.	4.2. Высокая точность решения. Зависит от применяемого численного метода и влияет на время счета.
5.1. Удобство подключения реальных устройств.	5.2. Способность запоминания достаточного большого количества информации.

В результате сопоставления свойств АВМ и ЦВМ можно сделать два дополнительных вывода:

1. ЦВМ не всегда может обеспечить нужную скорость вычислений при решении дифференциальных уравнений с малыми постоянными времени.
2. АВМ может не обеспечить нужную точность вычислений, больших по объему и содержащих нелинейные, функциональные и логические преобразования.

4.2. Ошибки вычислений на АВМ и ЦВМ

Существенная особенность вычислений на ЦВМ – это влияние ошибок округления. Для представления чисел в машине отводится конечное число знаков. Поэтому они должны быть округлены.

Влияние ошибок округления может быть установлено просчетом одной и той же программы два раза:

- 1) с обычной точностью;
- 2) с удвоенной точностью.

Разность между результатами вычислений дает оценку погрешности округления. Совпадение результатов указывает на отсутствие ошибок.

Использование приближенных математических выражений для аппроксимации моделируемых функций приводит к ошибке усечения. Оценка таких ошибок основана на анализе разложения этих функций в ряд Тейлора.

Например, при аппроксимации \dot{x} разностным оператором $\frac{(x_{n+1} - x_n)}{\tau}$ разложение x в ряд Тейлора относительно x_n дает

$$x_{n+1} = x_n + \tau \dot{x}_n + \frac{\tau^2}{2!} \ddot{x}_n + \frac{\tau^3}{3!} \dddot{x}_n + \dots$$

Если это выражение разрешить относительно \dot{x}_n

$$\dot{x}_n = \frac{1}{\tau} (x_{n+1} - x_n) - \left(\frac{\tau}{2} \ddot{x}_n + \frac{\tau^2}{6} \dddot{x}_n + \dots \right),$$

то последний член в правой части равенства является ошибкой усечения.

При выполнении последовательности операции ошибки округления и усечения от операции к операции могут накапливаться.

Например, если при выполнении 100 операций исходная ошибка E_0 возрастала на 1% на каждой операции, то ошибка накопления будет

$$E = (1,01)^{100} E_0 > 2,7 E_0$$

Для большинства вычислительных процедур ошибка округления обычно убывает при уменьшении приращения независимой переменной. Однако при этом возрастает количество вычислений и, соответственно, ошибка накопления.

Элементы АВМ, в свою очередь, генерируют шум, который ограничивает минимально допустимое значение полезного сигнала. Обычно шум составляет менее 1 мВ на 10 В полезного сигнала. Тем не менее, для уменьшения влияния шума желательно поддерживать уровень полезного сигнала как можно более высоким. В то же время этот уровень должен быть не выше допустимого ± 100 В или ± 10 В. Иначе, полученные результаты вычислений будут неверными.

Ошибка вычислений на АВМ зависит также от нестабильности свойств ее элементов из-за изменения температуры и дрейфа нуля операционных усилителей.

Кроме того, в АВМ накладываются ограничения на допустимую частоту обрабатываемых сигналов. Эти ограничения зависят от максимальной частоты, при которой усилитель работает без искажений амплитуды и фазы входного сигнала. Следовательно, ширина полосы пропускания усилителя тоже влияет на точность вычислений.

4.3. Общие принципы подготовки математической модели к исследованию на АВМ

Аналоговое моделирование осуществляется на АВМ, которая выполняет математические операции над непрерывными величинами (напряжение и ток). Эти величины являются аналогами тех физических величин, относительно которых составлялись уравнения исследуемых систем.

Математические операции на АВМ выполняются с помощью операционных блоков. Они строятся на основе операционного усилителя (рис. 4.1).

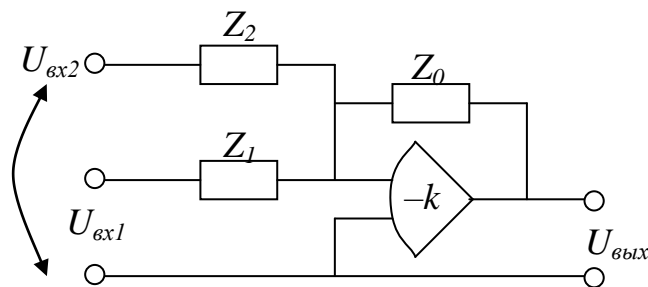


Рис. 4.1

ОУ – это усилитель постоянного тока с достаточно большим коэффициентом усиления ($k = 10^4 \div 10^6$). Передаточная функция операционного блока равна отношению комплексных сопротивлений цепи обратной связи z_0 и входной цепи ОУ z_i , то есть

$$W(p) = \frac{U_{вых}}{U_{exi}} = -\frac{z_0}{z_i} \quad (i = 1, 2) \quad (4.1)$$

В частности, из (4.1) следует, что z_0 и z_i активные сопротивления, то операционный блок является сумматором сигналов с одновременным умножением каждого из них на свой коэффициент, то есть:

$$U_{вых} = -\alpha_1 U_{ex1} - \alpha_2 U_{ex2}$$

где $\alpha_1 = R_0 / R_1$, $\alpha_2 = R_0 / R_2$.

Условное обозначение суммирующего усилителя представлено на рис.4.2.

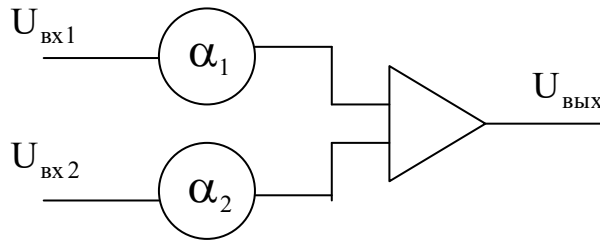


Рис.4.2. Условное обозначение суммирующего усилителя

Если $z_i = R_i$, а $z_0 = \frac{1}{cp}$ (то есть в обратную связь ОУ включена емкость), то операционный блок является интегросумматором, то есть

$$U_{\text{вых}} = -\alpha_1 \int_0^t U_{\text{вх1}}(t) dt - \alpha_2 \int_0^t U_{\text{вх2}}(t) dt$$

где $\alpha_i = \frac{1}{R_i C}$ $i = 1, 2$.

Алгоритм подготовки математической модели к исследованию на АВМ состоит из двух основных этапов:

1. Программирование модели на основе приведения исходного математического описания к виду, удобному для моделирования.
2. Проведение масштабирования математических переменных и расчет параметров коммутационной схемы модели: масштабированных коэффициентов передачи операционных блоков, карт настройки нелинейных блоков, если модель нелинейная, а также значений машинных начальных условий и внешних воздействий.

Условные обозначения некоторых нелинейных операционных блоков приведены в табл. 4.2.

Таблица 4.2

№ п/п	Уравнение операции	Условное обозначение блока
1	$y = F(x)$	
2	$y = x_1 x_2$	
3	$y = x(t - \tau_3)$	

Отметим, что требующие специальной настройки блоки типа 1 реализуются на операционных усилителях с помощью группы диодных ограничи-

телей. Последние вступают в работу при разных опорных напряжениях. Тем самым осуществляется кусочно-линейная аппроксимация исходной нелинейной характеристики $y=F(x)$.

4.4. Программирование АВМ для уравнений, разрешимых относительно старшей производной

Необходимо составить программу (структурную схему) для воспроизведения решения на АВМ следующих уравнений.

Случай 1: Нелинейного дифференциального уравнения

$$\left. \begin{aligned} y^{(n)} - F(y^{(n-1)}, \dots, y', y, t) &= 0 \\ y^{(i-1)}(0) &= y_0^{(i-1)} \quad (i = \overline{1, n}) \end{aligned} \right\}$$

Решение: Разрешаем заданное уравнение относительно старшей производной и последовательно интегрируем его n раз. После первого интегрирования:

$$y^{(n-1)} = y_n$$

где y_n получено из $\dot{y}_n = F(y^{(n-1)}, \dots, \dot{y}, y, t)$.

После второго интегрирования получим:

$$y^{(n-2)} = y_{n-1}$$

где y_{n-1} получено из $\dot{y}_{n-1} = y_n$.

После n -го интегрирования:

$$y = y_1$$

где y_1 получено из $\dot{y}_1 = y_2$.

В результате имеем систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{y}_i = \begin{cases} y_{i+1} & \text{при } i = \overline{1, n-1} \\ F(y^{(n-1)}, \dots, \dot{y}, y, t) & \text{при } i = n \end{cases} \quad (4.1)$$

с начальными условиями $y_i(0) = y_i^{(i-1)}$, $(i = \overline{1, n})$.

Соответствующая системе (4.1) структурная схема модели показана на рис. 4.3. А рассмотренный метод программирования называют *методом понижения порядка производной*.

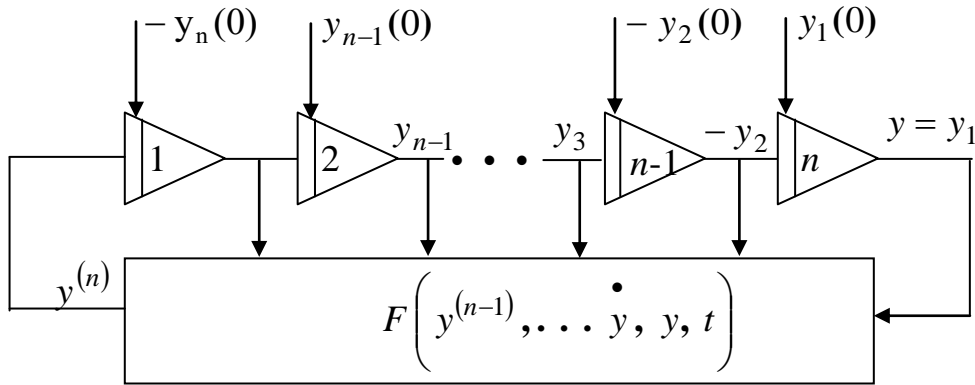


Рис. 4.3.

Случай 2: линейного, дифференциального уравнения, содержащего производные в правой части

$$\left. \begin{aligned} y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y &= b_0 x^{(n)} + b_1 x^{(n-1)} + \dots + b_n x \\ y^{(i-1)}(0) &= y_0^{(i-1)} \quad (i = \overline{1, n}). \end{aligned} \right\}$$

Решение: Разрешаем заданное уравнение относительно старшей производной выходной величины и последовательно интегрируем его n раз.

После первого интегрирования:

$$y^{(n-1)} = b_0 x^{(n-1)} + [b_1 x - a_1 y]^{(n-2)} + \dots + [b_{n-1} x - a_{n-1} y] + z_n,$$

где z_n получено из $z_n = b_n x - a_n y$.

После второго интегрирования получим:

$$y^{(n-2)} = b_0 x^{(n-2)} + [b_1 x - a_1 y]^{(n-3)} + \dots + [b_{n-2} x - a_{n-2} y] + z_{n-1},$$

где z_{n-1} получено из $z_{n-1} = b_{n-1} x - a_{n-1} y + z_n$.

После n-го интегрирования:

$$y = b_0 x + z_1,$$

где z_1 получено из $z_1 = b_1 x - a_1 y + z_2$.

В результате имеем систему уравнений:

а) для переменных состояния

$$z_i = \begin{cases} b_i x - a_i y + z_{i+1} & \text{при } i = \overline{1, n-1}; \\ b_n x - a_n y & \text{при } i = n; \end{cases} \quad (4.2)$$

б) для выходной величины

$$y = b_0 x + z_1$$

с начальными условиями

$$z_n(0) = y_0^{(n-1)} - b_0 x^{(n-1)}(0) - b_1 x^{(n-2)}(0) + a_1 y_0^{(n-2)} + \dots + b_{n-1} x(0) + a_{n-1} y_0;$$

$$z_{n-i}(0) = y_0^{(n-1-i)} - b_0 x^{(n-1-i)}(0) + \dots - b_{n-1-i} x(0) + a_{n-1-i} y_0 \quad (i = \overline{1, n-2});$$

$$z_1(0) = y_0 - b_0 x(0).$$

Соответствующая системе (4.2) структурная схема модели показана на рис. 4.4. Эта схема аналогична схеме на рис. 2.5. (§ 2.4).

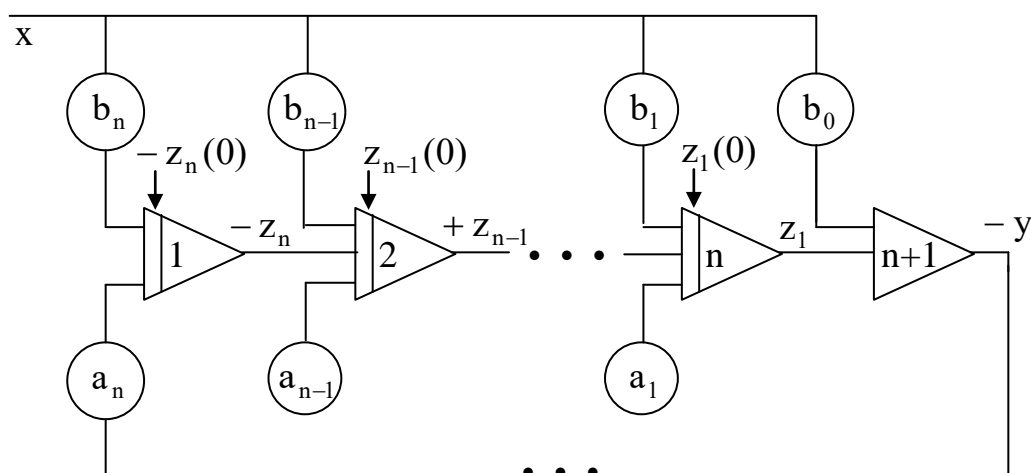


Рис. 4.4

Заметим, что для моделирования на АВМ линейных САУ могут использоваться и все остальные матричные модели, рассмотренные в главе 2.

4.5. Программирование АВМ для нелинейных уравнений, неразрешимых относительно старшей производной

Пусть задано уравнение n -го порядка в самом общем виде

$$F(x^{(n)}, \bar{x}, u, t) = 0, \quad \bar{x}(0) = \bar{x}_0, \quad (4.3)$$

где \bar{x} – вектор, $\bar{x} = [x^{(n-1)}, \dots, x^{(i)}, \dots, x]^T$.

Для программирования АВМ в этом случае используют один из следующих способов.

Способ 1. Он применяется тогда, когда уравнение (4.3) можно свести к виду

$$x^{(n)} + F(x^{(n)}, \bar{x}, u, t) = 0 \quad (4.4)$$

Уравнение (4.4) уже допускает применение метода понижения порядка производной, рассмотренной в п. 4.4.

Способ 2. Он основан на методе неявных функций, в соответствии с которым от уравнения n -го порядка (4.3) переходят к уравнению $(n+1)$ -го порядка.

$$x^{(n+1)} = +kF\left(x^{(n)}, \bar{x}, u, t\right) \operatorname{sign}\left\{\frac{\partial F(\dots)}{\partial x^{(n)}}\right\}, \quad \bar{x}(0) = \bar{x}_0, \quad x^{(n)}(0) = 0, \quad (4.5)$$

где знак частной производной функции $F(\dots)$ введен для обеспечения 1-го необходимого условия устойчивости, а постоянный коэффициент $k \gg 1$ должен быть таким, чтобы выполнялось и 2-ое необходимое условие устойчивости решения уравнения (4.5).

Поскольку уравнение (4.5) разрешено относительно старшей производной, то к нему применим метод понижения порядка производной. На рис. 4.5

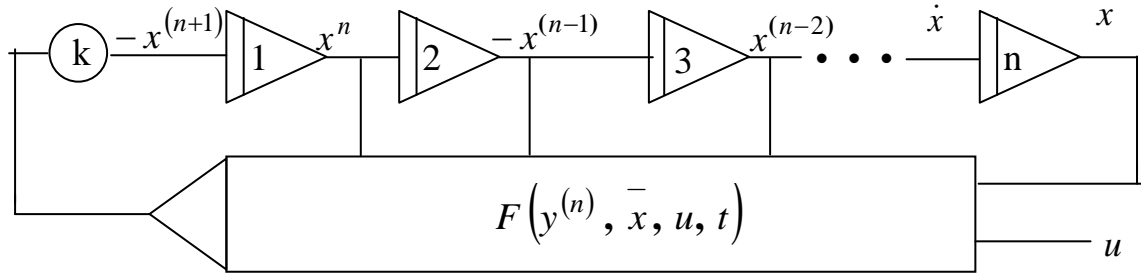


Рис. 4.5.

показана структурная схема модели для случая, когда $\frac{\partial F(\dots)}{\partial x^{(n)}} < 0$.

Способ 3: Он предназначен для программирования дифференциальных уравнений в частных производных и основан на параметризации. В частности, в дифференциальном уравнении

$$F(y^{(n)}, \bar{y}, x) = 0, \quad x = x_0, \quad \bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$$

все зависимые переменные $y^{(n)}, \bar{y} = [y^{(n-1)}, \dots, y]^T$ и независимая переменная x рассматриваются как функции некоторой новой переменной (параметра) t .

Введение дополнительной переменной хотя и повышает на единицу порядок исходного дифференциального уравнения, но зато часто приводит к новому уравнению, разрешимому относительно старшей производной.

Рассмотрим в качестве простейшего примера уравнение первого порядка с разделяющимися переменными

$$y \frac{\partial y}{\partial x} + x = 0, \quad x = 0, \quad y = 1 \quad (4.5)$$

Для проведения параметризации переменных x и y приведем уравнение (4.5) к виду:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x}{y} \quad (4.6)$$

Очевидно, что уравнение (4.6) эквивалентно системе 2-х линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = -x, \quad \frac{dx}{dt} = y, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$$

Соответствующая структурная схема модели приведена на рис. 4.6.

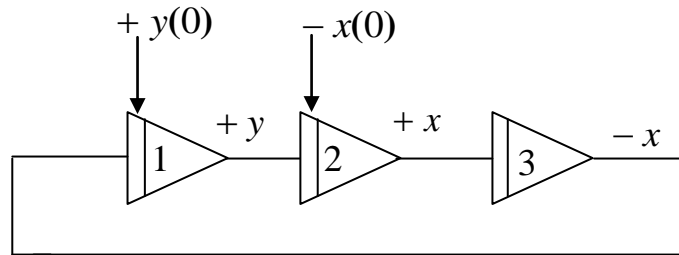


Рис. 4.6.

4.6. Особенности метода структурного моделирования систем на АВМ

Основное преимущество метода структурного моделирования состоит в определенном топологическом сходстве структурной схемы модели и структурной схемы моделируемой системы. Под указанным сходством понимают такое соответствие, при котором все исходные математические переменные имеют аналоги среди машинных переменных модели. Кроме того, все звенья исходной структурной схемы обязательно отображаются в модели отдельными операционными блоками или эквивалентной схемой их соединений.

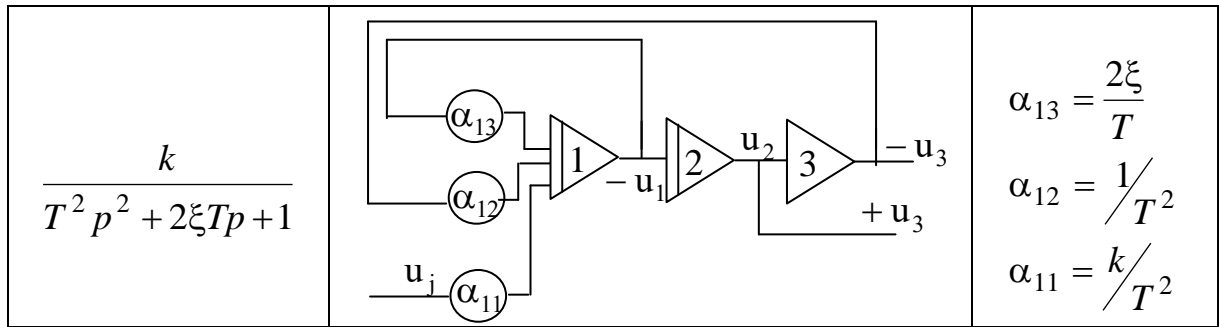
Все это позволяет программировать модель позвенно, используя для типовых звеньев САУ специально разработанные табличные схемы моделирования. Схемы моделирования некоторых типовых звеньев представлены в табл. 4.3.

Структурный подход при программировании АВМ позволяет осуществлять упрощение модели за счет объединения простых звеньев исходной структурной схемы в более сложную схему соединения нескольких звеньев. В частности, это даже необходимо делать в том случае, если исходная структурная схема моделируемой системы содержит нереализуемые на АВМ дифференцирующие и форсирующие звенья. В этом случае выполняется такое эквивалентное преобразование исходной структурной схемы САУ, чтобы все ее звенья описывались дробно-рациональными передаточными функциями

$$W(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}, \quad \text{причем } n \geq m.$$

Таблица 4.3

Передаточная функция звена	Схема моделирования	Уравнения эквивалентности
$\frac{k}{Tp+1}$		$\alpha_{i2} = \frac{1}{T}$ $\alpha_{i1} = \frac{k}{T}$
$\frac{k p}{Tp+1}$		$\alpha_{12} = \frac{1}{T}$ $\alpha_{11} = \frac{k}{T^2}$ $\alpha_{22} = 1$ $\alpha_{21} = \frac{k}{T}$
$k \frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1}, \quad T_1 > T_2$	Та же	$\alpha_{12} = \frac{1}{T_2}$ $\alpha_{11} = \frac{k(T_1 - T_2)}{T_2^2}$ $\alpha_{22} = 1$ $\alpha_{21} = \frac{kT_1}{T_2}$
$k \frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1}, \quad T_1 < T_2$		$\alpha_{12} = \frac{1}{T_2^2}$ $\alpha_{11} = \frac{(T_2 - T_1)}{T_2^2}$ $\alpha_{22} = 1$ $\alpha_{21} = \frac{kT_1}{T_2}$
$\frac{k(Tp+1)}{p}$	Та же	$\alpha_{11} = k$ $\alpha_{12} = 0$ $\alpha_{22} = 1$ $\alpha_{21} = kT$



Заметим, что упрощения модели могут осуществляться и за счет изменения порядка последовательно соединенных линейных звеньев (правило коммутативности).

4.7. Масштабирование математического описания и расчет масштабных коэффициентов модели

При моделировании систем на АВМ их математические переменные с помощью масштабов заменяются машинными переменными. Причем все зависимые машинные переменные являются электрическими напряжениями, а независимой переменной в АВМ является машинное время.

Масштабы переменных выбираются исходя из допустимого по условиям точности диапазона изменения амплитуды и частоты зависимых машинных переменных. В частности, для каждого типа АВМ задаются максимально допустимые значения напряжений ± 100 В или ± 10 В. А также указывается рекомендуемый диапазон времени наблюдения исследуемых процессов:

$$\tau_{\min} \div \tau_{\max}.$$

Рассчитываются масштабы по формулам:

$$\left. \begin{aligned} m_i &= \frac{u_{i\max}}{y_{i\max}}; \\ m_t &= \frac{\tau}{t_{\max}} \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

где: $u_{i\max}$ – максимально допустимое значение i -й машинной переменной, например, 10 В; $y_{i\max}$ – максимально возможное значение i -й переменной моделируемой системы; m_i – масштаб i -й переменной, который является размерной величиной; τ – машинное время, причем значение его выбирается из рекомендуемого диапазона: $\tau_{\min} \leq \tau \leq \tau_{\max}$; t_{\max} – длительность протекания исследуемого переходного процесса; m_t – масштаб времени, который является безразмерной величиной.

При масштабировании математического описания следует выполнить также масштабирование начальных условий $y_i(0)$, внешних возмущений f_i и времени запаздывания сигнала τ_3 , то есть:

$$\left. \begin{aligned} u_i(0) &= m_i y_i(0) \quad (i = \overline{1, n}); \\ u_j &= m_{0j} f_j \quad (j = \overline{1, m}); \\ T_3 &= m_t \tau_3 \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

где: $u_i(0)$, u_{0j} , T_3 – соответственно i -е начальное условие, j -е внешнее возмущение и время запаздывания сигнала в машинных переменных.

После масштабирования переменных структурной схемы модели осуществляется переход к коммутационной схеме модели и расчет масштабных коэффициентов.

При этом выходная величина каждого i -ого операционного блока структурной схемы модели связана с его входными величинами операцией усиления

$$y_i = -k_i x_j \quad (4.9)$$

или операцией интегрирования

$$y_i = -k_i' \int x_j dt \quad (4.10)$$

При переходе к машинным переменным вместо каждой переменной в уравнениях (4.9) и (4.10) необходимо подставить выражение для нее из (4.7), то есть :

$$\frac{u_i}{m_i} = -k_i \frac{u_j}{m_j}, \quad \frac{u_i}{m_i} = -k_i' \int \frac{u_j}{m_j m_t} dt.$$

Или, что то же самое:

$$u_i = -\beta_i u_j, \quad u_i = -\beta_i' \int u_j d\tau \quad (4.11)$$

где β_i и β_i' – масштабные коэффициенты передачи операционных блоков коммутационной схемы модели,

$$\beta_i = k_i \frac{m_i}{m_j}, \quad \beta_i' = k_i' \frac{m_i}{m_j m_t}.$$

На основании соотношений (4.11) можно сделать два вывода:

1. Масштабный коэффициент передачи операционного блока типа усилитель равен отношению произведения структурного коэффициента передачи и масштаба выходной величины к масштабу входной величины.
2. Масштабный коэффициент передачи операционного блока типа интегратор равен отношению произведения структурного коэффициента передачи и масштаба выходной величины к произведению масштабов входной величины и времени.

4.8. Классические (одношаговые) численные методы моделирования на ЦВМ

Если считать, что моделируется система с уравнением

$$\dot{y} = f(y, t) \quad (4.12)$$

то общая формула этой группы численных методов имеет следующий вид:

$$y_{i+1} = y_i + \sum_{i=1}^n b_i k_i(h) \quad (4.13)$$

где $k_i(h) = h \cdot f[t_j + \alpha_i h, y_i + \beta_{i1} k_1(h) + \beta_{i2} k_2(h) + \dots + \beta_{i,i-1} k_{i-1}(h)]$

Из (4.13) при различных значениях α_i, β_i можно получить, как частные случаи, известные формулы численного интегрирования Рунге и Кутты разного порядка точности:

– первого порядка (метод Эйлера)

$$y_{j+1} = y_j + k_1(h), \quad k_1(h) = h \cdot f(y_j, t_j) \quad (4.14)$$

– второго порядка (метод Эйлера–Коши):

$$y_{j+1} = y_j + \frac{1}{2} [k_1(h) + k_2(h)], \quad k_2(h) = h \cdot f(y_j + k_1(h), t_j + h) \quad (4.15)$$

и усовершенствованный метод Эйлера:

$$y_{j+1} = y_j + k_2\left(\frac{h}{2}\right), \quad k_2\left(\frac{h}{2}\right) = h \cdot f\left(y_j + \frac{1}{2} k_1(h), t_j + \frac{h}{2}\right) \quad (4.16)$$

четвертого порядка (метод Рунге–Кутты 4-го порядка):

$$\left. \begin{aligned} y_{j+1} &= y_j + \frac{1}{6} \left\{ k_1(h) + 2k_2\left(\frac{h}{2}\right) + 2k_3\left(\frac{h}{2}\right) + k_4(h) \right\}; \\ k_3\left(\frac{h}{2}\right) &= h \cdot f\left(y_j + \frac{1}{2} k_2\left(\frac{h}{2}\right), t_j + \frac{h}{2}\right); \\ k_4(h) &= h \cdot f\left(y_j + k_3\left(\frac{h}{2}\right), t_j + h\right); \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

Основной недостаток рассмотренных методов заключается в невозможности контроля текущей ошибки.

Кроме того, они критичны к величине шага h :

$$h \leq \frac{r}{|\lambda_{\max}|}, \quad (4.18)$$

4.9. Многошаговые численные методы моделирования

Такое название методы получили потому, что для вычисления очередного значения y_{j+1} необходимо знать " p " предыдущих (стартовых) значений

y_{j-k} ($k = \overline{0, p}$). Поэтому для получения нужного количества стартовых значений y_{j-k} необходимо использовать какой-либо одношаговый численный метод.

К группе многошаговых методов относятся так называемые методы «прогноза–коррекции». В них предполагается трехступенчатая процедура счета. Сначала y_{j+1}^p рассчитывается по формуле прогноза. Найденное значение y_{j+1}^p подставляется в исходное уравнение (4.12). Из него находится \dot{y}_{j+1} . Оно подставляется в формулу коррекции и вычисляется уточненное значение y_{j+1}^k .

К рассматриваемому типу методов относится, например, метод Милна. Для дифференциальных уравнений первого порядка его формулы прогноза и коррекции имеют вид:

$$y_{j+1} = y_{j-3} + \frac{4}{3} h \left(2 \dot{y}_j - \dot{y}_{j-1} + 2 \dot{y}_{j-2} \right);$$

$$y_{j+1} = y_{j-1} + \frac{h}{3} \left(\dot{y}_{j+1} + 4 \dot{y}_j + \dot{y}_{j-1} \right).$$

Достоинство данных методов заключается в том, что они позволяют рассчитывать на каждом шаге интегрирования величину ошибки округления δ . Она определяется как разность между «спрогнозированным» и скорректированным значениями, y_{j+1} , то есть $\delta = y_{j+1}^p - y_{j+1}^k$. Эта ошибка сравнивается с заданным допустимым значением δ_0 . И если $\delta < \delta_0$, то осуществляется переход к следующему шагу интегрирования. В противном случае y_{j+1}^k подставляется в исходное уравнение (4.12) и процедура вычислений повторяется.

В необходимости неоднократной процедуры вычислений заключается основной недостаток методов прогноза и коррекции.

С целью устранения этого недостатка разработаны методы «прогноза–модификации–коррекции».

Основная идея этих методов в том, что формула коррекции применяется один раз. Но используемое в формуле коррекции y_{j+1}^p модифицируется с учетом ошибки δ , полученной на предыдущем шаге интегрирования.

Один из возможных вариантов метода «прогноза–модификации–коррекции» представлен ниже.

Прогноз:

$$y_{j+1}^p = y_{j-3} + \frac{4}{3} h \left(2 \overset{\bullet}{y}_j - \overset{\bullet}{y}_{j-1} + 2 \overset{\bullet}{y}_{j-2} \right)$$

Модификация:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{j+1}^m = y_{j+1}^p - \frac{28}{29} (y_j^p - y_j^k); \\ \overset{\bullet}{y}_{j+1}^m = f(y_{j+1}^m, t_j + h). \end{array} \right. \quad (4.19)$$

Коррекция:

$$y_{j+1}^k = y_{j-1} + \frac{h}{3} \left(\overset{\bullet}{y}_{j+1}^m + 4 \overset{\bullet}{y}_j + \overset{\bullet}{y}_{j-1} \right)$$

Окончательно результат:

$$y_{j+1} = y_{j+1}^k + \frac{1}{29} (y_{j+1}^p - y_{j+1}^k) \quad (4.20)$$

Таким образом, метод «прогноз–модификация–коррекция» дает возможность оценить ошибки округления и удержать их в заданных пределах на каждом шаге интегрирования. Но он, как и все ранее рассмотренные численные методы, критичен к ошибкам накопления. Источник их заложен в самом принципе пошагового интегрирования.

4.10. Неявные численные методы моделирования

Это группа специальных машинных методов численного интегрирования, которые учитывают особенности ЦВМ. Одна из основных особенностей этих методов заключается в том, что в них используются формулы численного интегрирования с «обратной связью». В силу этого вычислительный процесс в них практически всегда устойчив.

В простейшем случае формулу интегрирования в неявном виде можно получить из формулы Ньютона–Лейбница

$$y_{j+1} = y_j + \int_{t_j}^{t_{j+1}} \overset{\bullet}{y}(t) dt \quad (4.21)$$

Для этого достаточно воспользоваться формулой правых прямоугольников при взятии интегралов в (4.12), то есть:

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \overset{\bullet}{y} dt = \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(y, t) dt$$

В результате получим формулу для неявного интегрирования по методу Эйлера:

$$y_{j+1} = y_j + h \cdot f(y_{j+1}, t_{j+1}) \quad (4.22)$$

Аналогично строятся неявные формулы для других методов. Например, неявная формула по методу Эйлера–Коши будет иметь вид:

$$y_{j+1} = y_j + \frac{1}{2}h \{f(y_j, t_j) + f(y_{j+1}, t_{j+1})\} \quad (4.23)$$

Неявные методы не имеют ограничений на величину шага дискретности. Однако точность воспроизведения истинного решения уравнения при большом шаге может оказаться недопустимо низкой.

Кроме того, при использовании неявных методов необходимо решать на каждом шаге нелинейные уравнения типа (4.22). Поэтому применение неявных методов обычно сочетают со специальными методами решения нелинейных уравнений.

4.11. Матричные методы моделирования систем в пространстве состояний

Все ранее рассмотренные методы являются скалярными. Матричные методы позволяют обеспечить независимость шага дискретности счета от устойчивости вычислительного процесса. Они основаны на введении в разностное матричное уравнение системы матричного множителя $\Phi(A, H)$, который подобен шагу интегрирования h в методе Эйлера, то есть:

$$\dot{\bar{Y}}_{j+1} = \bar{Y}_j + \Phi(A, H) F(t_j, \bar{Y}_j, \bar{U}_j) \quad (4.24)$$

Матрицы Φ и A находятся из соотношений:

$$\Phi(A, H) = \int_0^H e^{A\tau} d\tau, \quad A = \left. \frac{\partial F(\bar{Y}, t, \bar{U})}{\partial \bar{Y}} \right|_{t=t_1},$$

где A – матрица Якоби моделируемой системы

$$\dot{\bar{Y}} = F(\bar{Y}, t, \bar{U}) \quad (4.25)$$

в момент времени t_1 , соответствующий стационарным значениям $\bar{Y}(t)$.

Для вычисления матрицы $\Phi(A, H)$ можно использовать рекуррентное соотношение

$$\Phi_{v+1} = \Phi_v (2I_m + A\Phi_v), \quad v = 0, N-1;$$

$$\Phi_0 = h \left(I_m - \frac{Ah}{2} \right)^{-1}$$

причем начальный шаг интегрирования $h = \frac{H}{2^N} \leq \frac{1}{\|A\|}$, где $\|\dots\|$ – любая из норм матрицы,

$$\|\dots\|_{IV} = n \max_{i,j} |a_{ij}|, \quad \|\dots\|_I = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad \|\dots\|_{III} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2}$$

Для линейных систем с математическим описанием

$$\dot{\bar{Y}} = A\bar{Y} + \bar{U}, \quad \bar{Y}(0) = \bar{Y}_0, \quad \bar{U} = const$$

разностное уравнение имеет вид

$$\bar{Y}(t+H) = e^{AH} Y(t) + \int_0^H e^{A\tau} d\tau \bar{U} \quad (4.26)$$

где H – шаг дискретизации, который из удобства наблюдения процесса $\bar{y}(t)$ и не зависит от свойств этого процесса.

При малых шагах дискретизации “ h ” матрицу e^{AH} и вектор $\int_0^H e^{A\tau} d\tau \bar{U}$ вычисляют путём соответствующих разложений

$$\left. \begin{aligned} e^{At} &= I_m + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots \\ \int_0^t e^{A\tau} d\tau &= I_m t + \frac{At^2}{2!} + \frac{A^2 t^3}{3!} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

при $t=h$.

При достаточно больших H используются рекуррентные формулы [18]:

$$\text{для } e^{AH} = \Phi_N : \quad \text{для } \int_0^H e^{A\tau} d\tau \bar{U} = q_N : \quad (4.28)$$

$$\Phi_{N+1} = \Phi_{\mathfrak{g}}; \quad q_{\mathfrak{g}+1} = (I_m + \Phi_{\mathfrak{g}})q_{\mathfrak{g}}$$

$$\text{где } \Phi_0 = e^{Ah}, \quad q_0 = h(I_m - \frac{Ah}{2})^{-1} \cdot \bar{U}, \quad \mathfrak{g} = 0, N-1.$$

Достоинство матричных методов в том, что по сравнению со скалярными они позволяют уменьшить время решения задачи в 20–30 раз.

Недостаток метода (4.24) – это необходимость вычисления матрицы $\Phi(A, H)$ в каждом частном случае, а также необходимость составления специальной программы пересчёта шагов интегрирования.

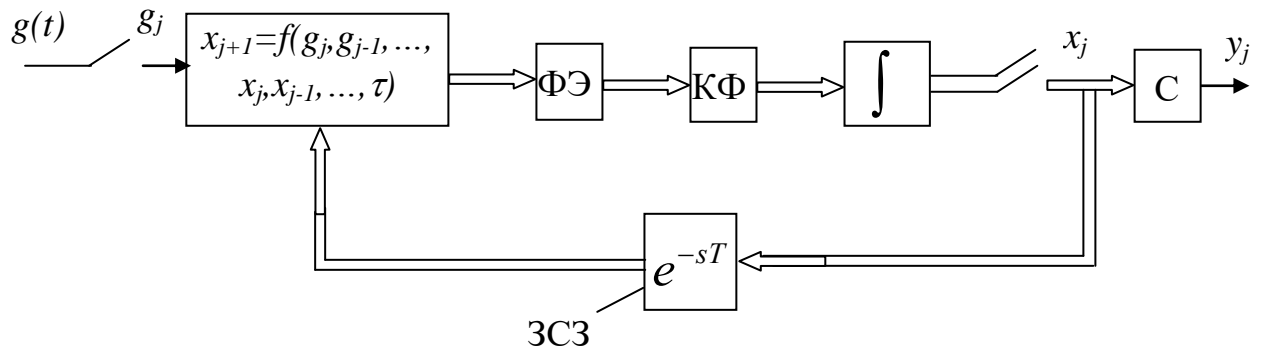
4.12. Особенности метода структурного моделирования непрерывных систем на ЦВМ

Такое моделирование осуществляется по передаточным функциям звеньев структурной схемы САУ с помощью z -преобразования. Причём оно может применяться только в тех случаях, когда [17]

$$\omega_u \geq \omega_{21} + \omega_{22},$$

где ω_u – частота квантования сигнала в дискретной модели; ω_{21}, ω_{22} – граничные частоты спектра входного сигнала и полосы пропускания приведённой непрерывной части системы.

Рассмотрим сначала особенности дискретного аналога непрерывной системы, которая моделируется на ЦВМ путём численного решения её диф-



ференциальных уравнений (рис.4.7).

Рис. 4.7.

На рис. 4.7 приняты следующие обозначения: ФЭ – формирующий элемент (непрерывная часть АЦП); ЗСЗ – звено систематического запаздывания, необходимость которого обусловлена дискретностью процесса интегрирования сигнала в прямой цепи модели; КФ – компенсирующий фильтр, который предназначен для компенсации, во-первых, систематического запаздывания, во-вторых, амплитудных и фазовых искажений, обусловленных работой АЦП.

Заметим, что в каждом численном методе предусмотрен свой тип КФ, что и отличает их друг от друга.

Таким образом, при моделировании на ЦВМ непрерывной САУ любым методом необходимо учесть систематическое запаздывание, а также искажения сигнала, вносимые АЦП.

Особенности метода структурного моделирования рассмотрим на примере моделирования линейной системы (рис. 4.8).

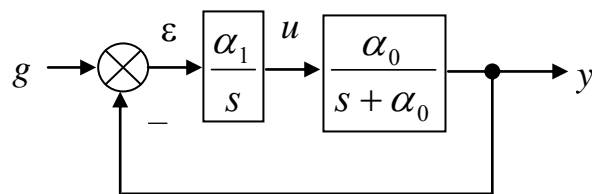


Рис. 4.8

Структурная схема дискретного аналога этой САУ приведена на рис. 4.9.

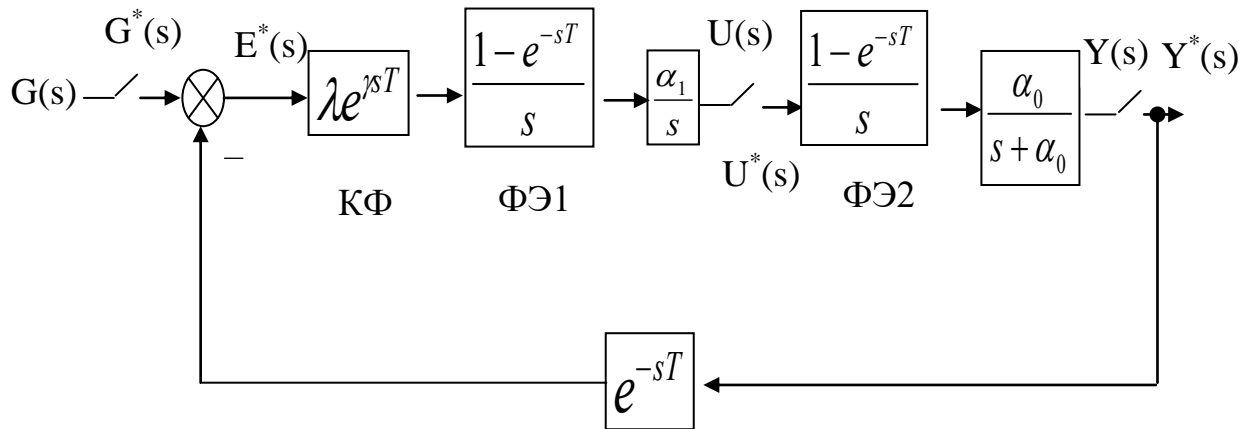


Рис. 4.9.

Из рис. 4.9 видно, это при использовании метода структурного моделирования для перехода к дискретному аналогу непрерывной системы необходимо:

1. Подключить ко входу каждого моделируемого звена свой преобразователь для преобразования непрерывного сигнала в дискретный;
2. Включить во обратную связь системы звено систематического запаздывания;
3. Ввести в прямую цепь системы компенсирующий фильтр для компенсации систематического запаздывания, а также амплитудных и фазовых искажений сигнала, вносимых АЦП.

Достаточно часто, когда в качестве формирующего элемента дискретной модели применяется фиксатор нулевого порядка, полагают $\gamma=1$. А “ λ ” находят эмпирически или по соответствию корней характеристических уравнений модели и её оригинала: $s_i \div e^{s_i T}$.

5. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

5.1. Исследование устойчивости линейных систем на основе применения критерия Рауса

Сопоставление машинных реализаций известных критериев устойчивости показало, что наиболее эффективным с вычислительной точки зрения является алгоритм на основе критерия Рауса.

Согласно этого критерия для суждения об устойчивости системы с характеристическим уравнением

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad (5.1)$$

необходимо исследовать полярность коэффициентов первого столбца таблицы Рауса.

Рассмотрим один из наиболее эффективных алгоритмов расчёта элементов таблицы Рауса. Для этого коэффициенты характеристического уравнения (5.1) представим элементами массива A :

$$A(1)s^n + A(2)s^{n-1} + \dots + A(N)s + A(N+1) = 0.$$

Элементы массива A записываются в первых двух строках таблицы Рауса (табл.5.1), причём $A(N+2)=0$.

Таблица 5.1

Вспомогательный коэффициент R	№ строки	№ столбца			
		1	2	3	4
—	1	$A(1)$	$A(3)$	$A(5)$...
—	2	$A(2)$	$A(4)$	$A(6)$...
$R=A(1)/A(2)$	3	$A(3)=A(3)-RA(4)$	$A(5)=A(5)-RA(6)$	$A(7)=A(7)-RA(8)$...
$R=A(2)/A(3)$	4	$A(4)=A(4)-RA(5)$	$A(6)=A(6)-RA(7)$	$A(8)=A(8)-RA(9)$...
...
$R=A(i-2)/A(i-1)$	i	$A(i)=A(i)-RA(i+1)$	$A(i+2)=A(i+2)-RA(i+3)$	$A(i+4)=A(i+4)-RA(i+5)$...
...
$R=A(N-1)/A(N)$	$N+1$	$A(N+1)=A(N+1)$

Элементы других строк вычисляются построчно слева–направо, начиная с 3–й строки. После окончания работы алгоритма (рис. 5.1) в первом столбце таблицы будут располагаться обновлённые элементы массива A .

Заметим, что данный алгоритм целесообразно использовать тогда, когда математическая модель системы имеет каноническую форму. В других случаях можно применять матричный алгоритм, который рассмотрим в следующем параграфе.

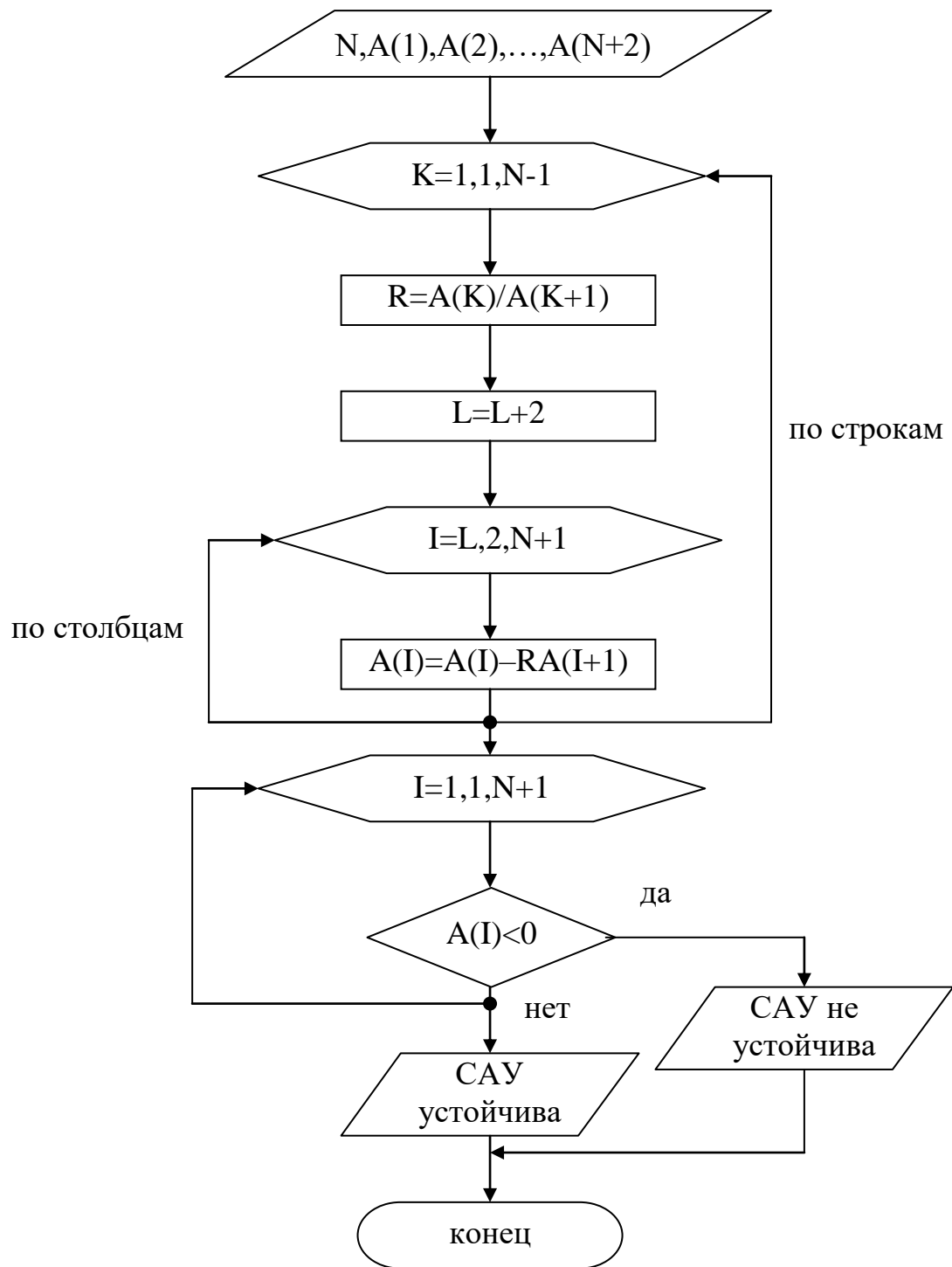


Рис.5.1

5.2. Исследование устойчивости систем по норме и следу функционально–преобразованной матрицы

Рассмотрим матричное уравнение системы

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + \bar{U} \quad (5.2)$$

и матрицу $B = I_m - 2(I_m - A)^{-1}$.

Если обозначить собственные числа матрицы A через s_i $i = \overline{1, n}$, то для матрицы $I_m - A$ это $1 - s_i$, а для матрицы B :

$$\rho_i = 1 - \frac{2}{1 - s_i}.$$

Особенность матрицы “ B ” заключается в том, что все её собственные числа ρ_i по модулю меньше единицы, если собственные числа матрицы A лежат в левой полуплоскости комплексного переменного s .

Следовательно можно утверждать, что для устойчивости системы (5.2) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} B^k = 0, \quad (5.3)$$

$$\text{или} \quad \|B^m\| < 1 \quad (m=0, 2, 4, \dots, 2^k), \quad (5.4)$$

где $\|B\|$ – любая из норм матрицы B : $\|B\| = \max \sum_{j=1}^n b_{ij}; \sqrt{\sum_{i,j=1}^n b_{ij}^2}$.

С другой стороны, если модуль суммы диагональных элементов (след) матрицы B

$$|S_p B| \geq n, \quad (5.5)$$

то найдётся хотя бы одно собственное число s_i матрицы A , расположенное в правой полуплоскости комплексного переменного s .

На основании (5.4) и (5.5) можно построить алгоритм исследования устойчивости системы (5.2). Он сводится к циклической проверке сразу 2-х условий:

$$\|B^m\| < 1 \quad \text{и} \quad |S_p B^m| \geq n \quad (m=0, 2, 4, \dots, 2^k). \quad (5.6)$$

5.3 Частотные методы исследования моделей линейных систем

В соответствии с принципом множественности моделей при исследовании любой САУ в каждом конкретном случае используют ту её модель, которая наиболее приспособлена для решения поставленной задачи моделирования.

В частности для исследования частных характеристик разомкнутой системы и её объекта модель системы удобно представить в виде системы уравнений управления, состояния объекта и выхода, т.е.

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{X}} &= A\bar{X} + B\bar{U} + D\bar{Z}; \\ \dot{\bar{U}} &= V\bar{U} + K\bar{Y} + R\bar{G}; \quad \bar{Y} = C\bar{X} \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

где $\bar{X}, \bar{Z}, \bar{U}, \bar{G}, \bar{Y}$ – векторы состояния, возмущения, управления, задания и выхода.

Заметим попутно, что форма модели (5.7) удобна и для исследования реакции замкнутой системы на возмущающие воздействия, приложенные ко входу ОУ.

Строить частотные характеристики разомкнутой САУ на основе уравнений (5.7) можно разными способами.

1. Способ основан на численном решении уравнений (5.7).

Если задать в (5.7) $\bar{z}(t) = (0, 0, \dots, \sin \omega_j t, 0, \dots, 0)$ и $B=R=0$, то можно вычислить вынужденные составляющие векторов \bar{Y} и \bar{U} при воздействии j -й составляющей вектора \bar{Z} :

$$\left\{ \bar{Y}_B[kh] \right\}_j \quad \text{и} \quad \left\{ \bar{U}_B[kh] \right\}_j.$$

При этом длительность счёта достаточно положить равной $(3 \div 5)T$, где $T=2\pi/\omega$, а шаг счёта $h \leq 0,1 \frac{2\pi}{\omega}$.

Определение АЧХ, например по каналам $z_j \rightarrow y_i$ и $z_j \rightarrow u_l$ осуществляется после обработки i -й составляющей вектора $\left\{ \bar{Y}_B[kh] \right\}_j$ и l -й составляющей вектора $\left\{ \bar{U}_B[kh] \right\}_j$

$$\left. \begin{aligned} \text{а) для объекта } A_{ij}(\omega) &= y_{imax}(\omega); \\ \text{б) для системы } A_{lj}(\omega) &= u_{lmax}(\omega). \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

Значения ФЧХ находятся по формулам

$$\varphi_{ij}(\omega) = -\frac{\Delta T_i}{T} 360^\circ; \quad \varphi_{lj}(\omega) = -\frac{\Delta T_l}{T} 360^\circ, \quad (5.9)$$

где ΔT_i и ΔT_l – сдвиг фаз между сигналами соответственно y_i, z_j и u_l, z_j .

2. Способ основан на отыскании передаточных матриц и расчёте ЧХ по соответствующим формулам. Если перейти в (5.7) к изображениям по Лапласу и положить $B=R=0$, то можно найти:

$$\left. \begin{aligned} \bar{Y}(s) &= C(sI_m - A)^{-1} D\bar{Z}(s); \\ \bar{U}(s) &= (sI_m - V)^{-1} K\bar{Y}(s). \end{aligned} \right\}$$

Следовательно передаточные матрицы объекта и управляющего устройства имеет вид

$$W_{YZ}(s) = C(I_m - A)^{-1} D; \quad \left. \right\}$$

$$W_{UY}(s) = (sI_m - V)^{-1}K.$$

Откуда передаточная матрица системы

$$W(s) = W_{YZ}(s) \cdot W_{UY}(s). \quad (5.10)$$

На основании (5.10) можно получить частные передаточные функции, связывающие отдельные составляющие векторов $\bar{Z}u\bar{U}$:

$$W_{lj}(s) = \frac{a_1 + b_1 j}{a_2 + b_2 j}.$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} A_{lj}(\omega) &= \sqrt{\frac{a_1^2 + b_1^2}{a_2^2 + b_2^2}}; \\ \varphi_{lj}(\omega) &= \arg(a_1 + b_1 j) - \arg(a_2 + b_2 j), \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

причём

$$\arg(a_m + jb_m) = \arccos \frac{a_m}{\sqrt{a_m^2 + b_m^2}} = \arcsin \frac{b_m}{\sqrt{a_m^2 + b_m^2}} \quad (m = 1, 2).$$

5.4. Исследование линейных моделей системы на основе применения корневых, интегральных и прямых оценок качества

Корневые оценки качества процессов можно получить путём построения и анализа корневых годографов. Для этого при каждом возможном значении варьируемого параметра системы решают её характеристическое уравнение и находят его корни. А затем строят траектории миграции корней на комплексной плоскости. Построив корневой годограф получают зависимость расположения корней характеристического уравнения системы от значений её варьируемого параметра. А по расположению корней, как известно из ТАУ, можно судить о степени устойчивости системы, а также о показателях качества её переходных процессов.

При исследовании моделей на основе **интегральных и прямых** оценок качества можно применить системный метод анализа. В частности, если в модели (5.7) задать $\bar{Z} = 0$ и $\bar{G} \neq 0$, то можно получить матрицу всех парциальных составляющих $y_{ij}(t)$ ($i = \overline{1, n}$) для каждого $g_j(t)$.

По составляющим $y_{ij}(t)$ можно провести более глубокий анализ исследуемой системы, нежели классическими методами. Каждый из классических методов ориентирован на исследование чего-то одного: то ли устойчивости, то ли качества переходных процессов, то ли точности в установившемся режиме.

Исследуя парциальные составляющие $y_{ij}(t)$ при различных возмущениях, в том числе и при $\bar{Z} \neq 0, \bar{G} = 0$, можно получить исчерпывающую информацию о поведении модели.

5.5. Исследование абсолютной устойчивости состояния равновесия нелинейной системы

Исходное неравенство критерия абсолютной устойчивости Попова

$$\operatorname{Re}(1 + jq\omega)W(j\omega) + \frac{1}{k} > 0 \quad (5.11)$$

для системы с непрерывной нелинейностью $F(x)$ причём

$$0 \leq \frac{F(x)}{x} \leq k < \infty, \quad F(0) = 0,$$

неудобно для применения на ЭВМ.

Если учесть, что $W(p) = \frac{\sum_{j=0}^n b_j p^j}{\sum_{i=0}^n a_i p^i}$, то условие (5.11) можно записать в

алгебраической форме

$$S(\omega) = \sum_{s=0}^n g_{2s} \omega^{2s} > 0 \text{ при } \omega \geq 0, \quad (5.12)$$

где $g_{2s} = E_{2s} + kL_{2s} - kqG_{2s}$ ($s = \overline{0, n}$), в свою очередь

$$\left. \begin{aligned} E_{2s} &= a_s^2 + 2 \sum_{i=1}^{\min(s, n-s)} (-1)^i a_{s-i} a_{s+i} \quad (s = \overline{0, n}), \\ L_{2s} &= \sum_{i=\max(0, 2s-u)}^{\min(2s, n)} (-1)^{s+i} a_i b_{2s-i} \quad (s = \overline{0, u_1}), \\ G_{2s} &= \sum_{i=\max(0, 2s-u-1)}^{\min(2s-1, n)} (-1)^{s+i+1} a_i b_{2s-i-1} \quad (s = \overline{0, u_2}), \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

причём, если $(-1)^{n+u} > 0$, то $u_1 = u_2 = \frac{n+u}{2}$, в противном случае

$$u_1 = \frac{n+u-1}{2}, \quad u_2 = \frac{n+u+1}{2}.$$

Определение: Для выполнения неравенства (5.12) необходимо и достаточно, чтобы в первом столбце таблицы Рауса было n перемен знака для полинома:

$$d_{2n}\omega^{2n} + d_{2n-1}\omega^{2n-1} + \dots + d_1\omega + d_0, \quad (5.14)$$

где $d_0 > 0$, $d_{2s} = (-1)^s g_{2s}$, $d_{2s-1} = 2sd_{2s}$ ($s = \overline{0, n}$).

Алгоритм проверки условия (5.12) строится таким образом, что вначале используется $q = q_0 = 0$, а затем – положительные q_{j+1}^+ и отрицательные q_{j+1}^- значения q вычисляются поочерёдно по формулам

$$q_j^+ = 1 / \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{l-j}{l+j} \right), \quad q_{j+1}^- = -q_j \quad (j = 1, 3, \dots, l-1),$$

где $l+1$ – число принятых переборов значений q , причём l задаётся чётным числом. Схема алгоритма приведена на рис. 5.2.

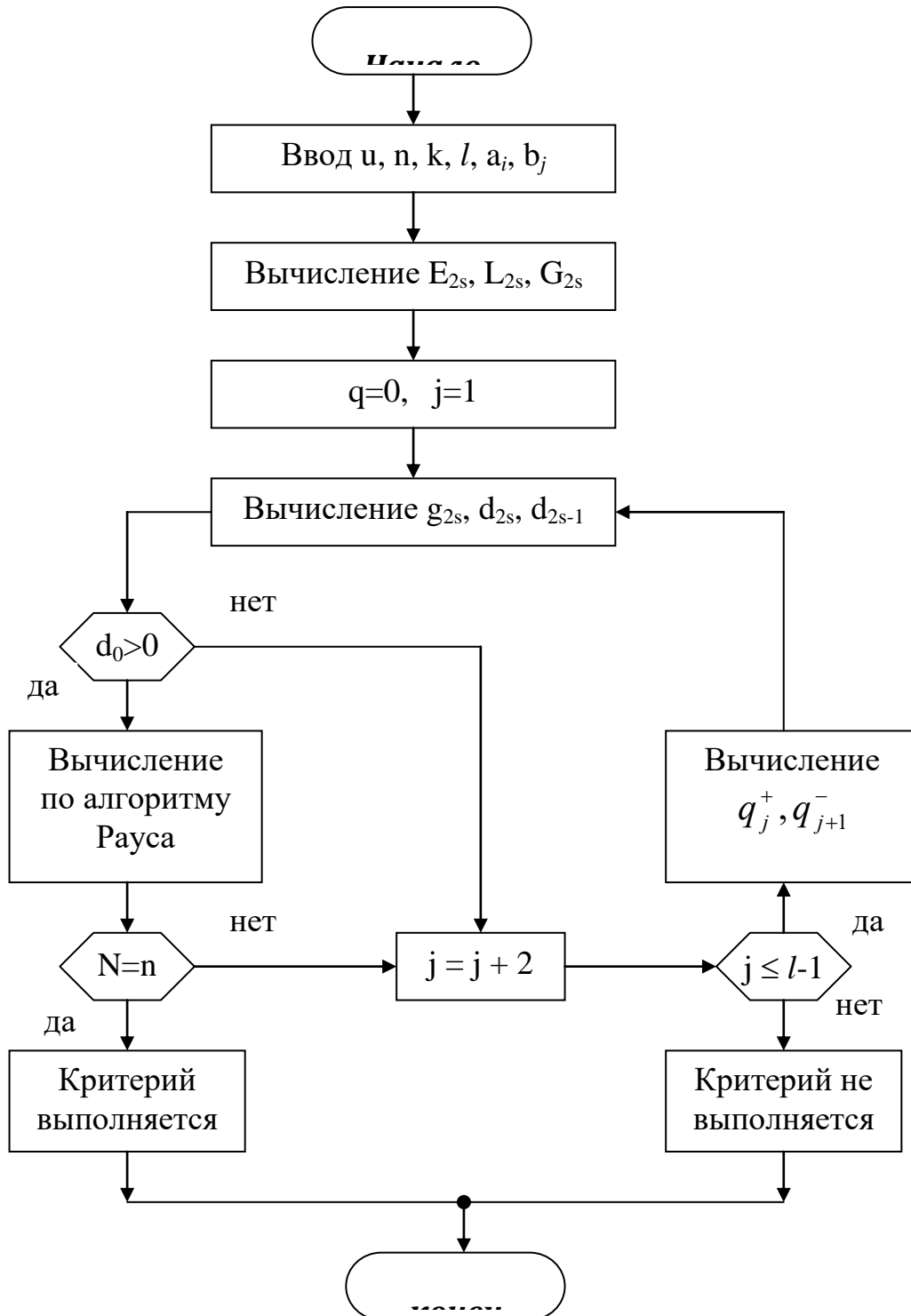


Рис.5.2

5.6. Исследование нелинейных моделей систем методами линейной теории и моделирования на ЭВМ

Нелинейные модели определённого класса можно исследовать методами линейной теории. Это методы кусочно–линейной аппроксимации, гармонической и статической линеаризации нелинейностей, фазовых траекторий и точечных преобразований, частотный метод и другие.

Однако все эти методы, хотя и получили достаточно широкое распространение, но имеют ограниченные возможности. Они применимы лишь к системам, имеющим одну или малое число нелинейностей и то определённого типа. Либо когда нелинейная система имеет невысокий, в частности, второй и третий порядок.

При решении *многих* практических задач исследования нелинейных систем на основе *моделирования* часто оказывается единственно приемлемым методом. В частности, если задана нелинейная система достаточно вы-

сокого порядка $\dot{\bar{Y}} = F(\bar{Y}, g)$, $\bar{Y}(0) \neq 0$, то решение этого уравнения на ЭВМ, например при $g = 0$, позволяет получить временные диаграммы сразу всех переменных состояния. Одновременно можно построить проекции пространственной фазовой траектории системы сразу на все $n-1$ фазовые плоскости. Под $(n-1)$ – фазовыми плоскостями подразумеваются соответствующие сечения фазового пространства с координатами в виде смежных переменных состояния, т.е. $y_1 \div y_2, y_2 \div y_3, \dots, y_{n-1} \div y_n$.

И если при задании максимально допустимых начальных значений фазовых координат изображающая точка будет стремиться в начало координат, то движение САУ будет асимптотически устойчивым при любых НУ.

Если такая же картина будет получена и при максимально возможном типовом возмущении $g(t)$, то аналогичный характер движения системы сохранится при любых других возмущениях того же типа.

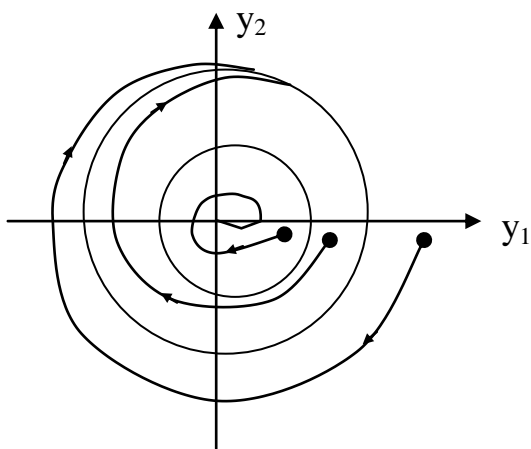


Рис.5.3

Наконец, если изображающая точка системы укажет на наличие предельного цикла, то необходимо повторить расчёт переменных состояния. При этом точку начального состояния системы нужно задать внутри цикла. Дело в том, что в нелинейных САУ зачастую имеется два предельных цикла: один, –малый, – неустойчивый и второй, –большой, – устойчивый (рис. 5.3).

Движение системы в этом случае устойчиво в малом, неустойчиво в среднем и устойчиво в большом.

5.7. Параметрическая оптимизация нелинейных моделей систем

Её осуществляют путём направленного изменения параметров модели x_1, x_2, \dots, x_m с целью достижения экстремума заданного критерия оптимизации (КО) $F(\bar{x})$. Практически, оптимизация заключается в выполнении последовательности шагов изменения вектора параметров \bar{x} в определенном направлении. Для выбора направления движения на каждом шаге можно использовать информацию о значении КО и его частных производных по оптимизированным параметрам x_i ($i = \overline{1, m}$).

Методы нулевого порядка (прямые методы или методы поиска) используют только значения КО. Это методы покоординатного спуска, случайного спуска, симплекс-метод и др. Общий недостаток этих методов – низкая скорость сходимости. Но они эффективны тогда, когда минимизируемая целевая функция не является гладкой и поэтому методы с высокой скоростью сходимости неприменимы.

Методы первого порядка (градиентные) используют помимо значений целевой функции, значения её первых производных. Простейший из градиентных методов – метод наискорейшего спуска. Недостаток этого метода – тоже низкая скорость сходимости, если минимизируемая функция является “овражной”.

Методы второго порядка требуют дополнительно вычисления вторых производных и имеют быструю сходимость. Но они применимы тогда, когда функция цели является выпуклой и достаточно гладкой. Поэтому при оптимизации модели на ЭВМ рекомендуется использовать [19] методы нулевого порядка.

Рассмотрим алгоритм случайного поиска с адаптацией распределения пробных шагов (рис. 5.4). Приращение для пробного шага на i -м этапе этого алгоритма выбирается равным $\bar{s}_i = A_i \bar{\xi}_i$, где A_i – $(n \times n)$ -матрица; $\bar{\xi}_i$ – случайный вектор, равномерно распределённый на поверхности n -мерной сферы единичного радиуса. Матрица A_i преобразует n -мерную сферу в n -мерный эллипсоид, на поверхности которого распределены пробные случайные точки.

В процессе поиска матрица A_i изменяется таким образом, что эллипсоид растягивается в удачном и сжимается в неудачном направлениях. Пусть, например, из точки поиска \bar{x}_i делается пробный шаг $\bar{s}_i = A_i \bar{\xi}_i$. Если он оказывается неудачным, то делается новый пробный шаг в противоположном направлении. В случае удачного шага, осуществляется спуск в выбранном направлении с увеличенным шагом. В результате находится новая точка поиска $\bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + \gamma_i \bar{s}_i$, где $\gamma_i = 0$ при неудачных шагах и $\gamma_i \neq 0$ при удачных шагах.

Корректировка матрицы A_i осуществляется по формуле

$$A_{i+1} = A_i + (\beta_i - 1) \frac{s_i s_i^T A_i}{s_i^T s_i},$$

где $\beta_i = 0.5$ при $\gamma_i = 0$; $\beta_i = |\gamma_i|$ при $\gamma_i \neq 0$.

При таком преобразовании эллипсоид растягивается, если $\beta_i > 1$, или сжимается, – если $\beta_i < 1$, – в направлении вектора $\overline{s_i}$ (оставаясь неизменным в ортогональных $\overline{s_i}$ направлениях).

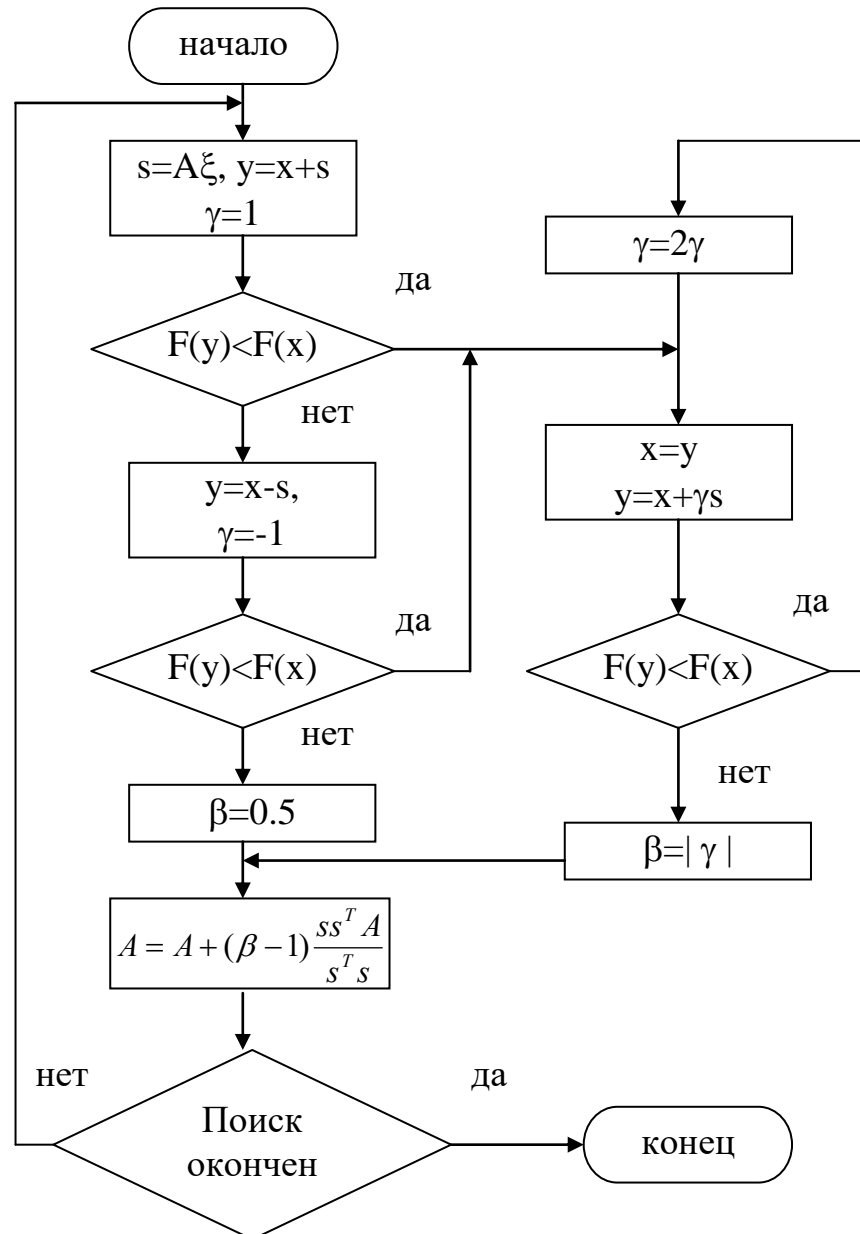


Рис. 5.4.

5.8. Алгоритм определения предельного коэффициента усиления нелинейной системы с абсолютно устойчивым состоянием равновесия

Он основан на использовании ранее рассмотренного в §5.6 алгоритма анализа абсолютной устойчивости в сочетании с методом деления интервала пополам. Обозначим: через k_H – коэффициент усиления нелинейной системы, причём $k_H = k \cdot k_L$, где k_L – коэффициент усиления ЛЧ системы, а k – коэффициент наклона ограничивающей сектор расположения характеристики НЭ; ε – относительная погрешность определения предельного коэффициента усиления; k_1 и k_2 – соответственно нижняя и верхняя граница допустимых значений k_H ; h – шаг изменения k ; M – вспомогательная переменная; l – число принятых для перебора значений параметра Попова “ q ”.

Схема алгоритма приведена на рис. 5.5, а работает он следующим образом.

Сначала производится проверка выполнения критерия Попова для $k_H = k_2$. Если критерий выполняется, то k_2 принимается за предельное значение k_H . Его значение выводится на печать и алгоритм свою работу заканчивает.

Если для значения k_2 критерий Попова не выполняется, то интервал $(0, k_2)$ делится пополам и производится проверка критерия Попова для $k_H = k_2/2$. В зависимости от результата проверки новый интервал $(0, k_2/2)$ снова делится пополам. И так до тех пор, пока не будет найдено с заданной точностью значение предельного коэффициента усиления.

Полученное значение предельного коэффициента усиления выводится на печать и алгоритм свою работу заканчивает. Если же ни в одной точке интервала (k_1, k_2) критерий Попова не выполняется, то на печать выводится текст: “Критерий не выполняется”.

Отличительная особенность рассмотренного алгоритма заключается в том, что он предусматривает перебор значений лишь одной переменной q , а не двух q и ω как в других известных алгоритмах.

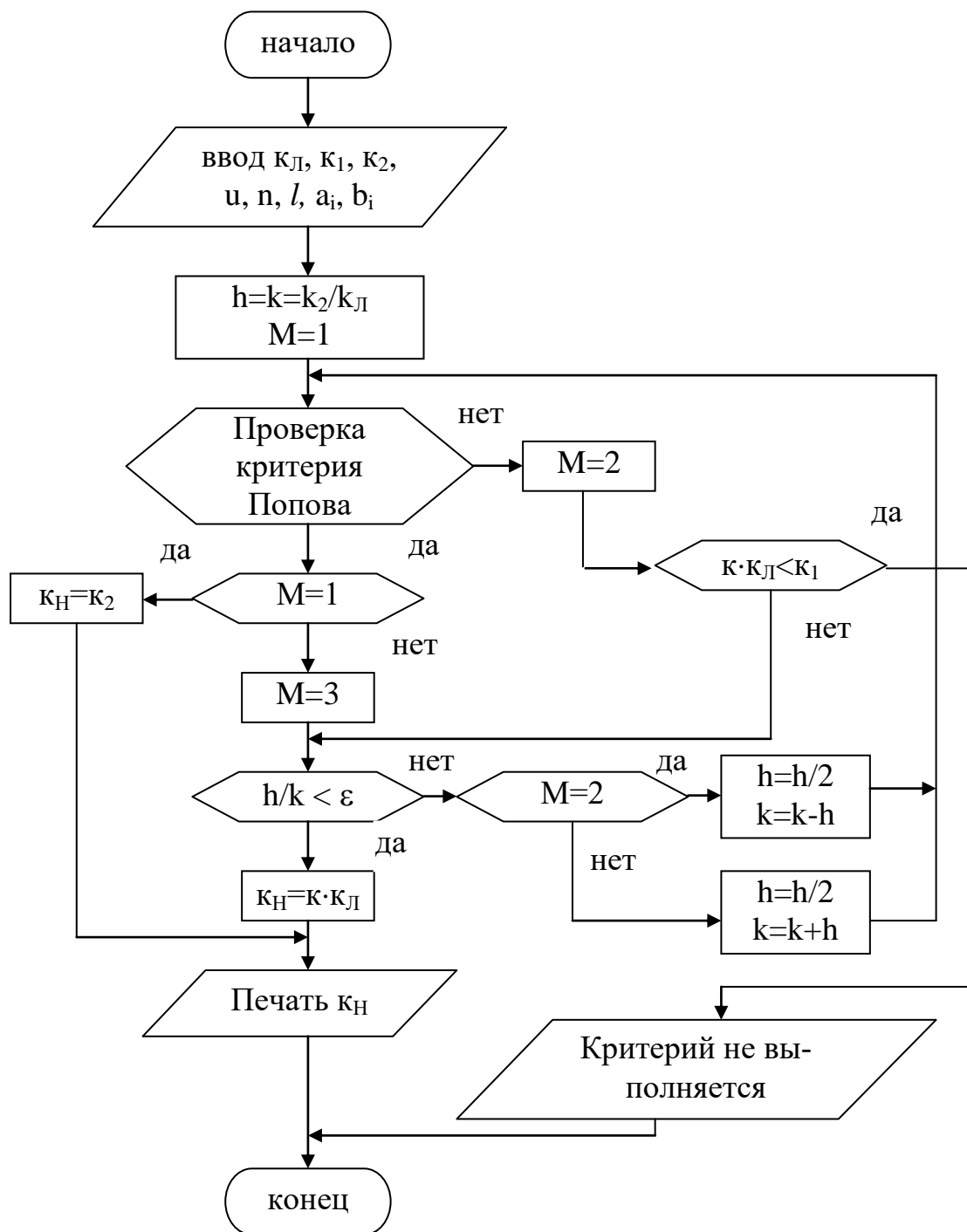


Рис. 5.5.

6. ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

6.1. Определение, цель, достоинства и недостатки имитационного моделирования

Имитационное моделирование – это процесс алгоритмического описания работы системы, его программной реализации, а также планирования, проведения и обработки результатов эксперимента с “И” моделью системы на ЭВМ.

Цель имитационного моделирования заключается в том, чтобы, во-первых, описать поведение системы; во-вторых, построить и проверить гипотезы, объясняющие поведение системы; в-третьих, использовать эти гипотезы для предсказания поведения системы при изменении её структуры, параметров или внешних воздействий [22].

Имитационное моделирование целесообразно применять при наличии одного из следующих условий [22]

- 1) не существует законченной математической постановки задачи исследования, либо ещё не разработаны аналитические методы её решения;
- 2) аналитические методы имеются, но математические процедуры столь сложны и трудоёмки, что имитационное моделирование является более простым способом решения задачи;
- 3) аналитические решения существуют, но их реализация невозможна из-за недостаточной математической подготовки исследователя. В этом случае необходимо, правда, сопоставить затраты на проектирование И-модели и эксперимент с ней с затратами, по приглашению специалистов со стороны;
- 4) кроме оценки определённых параметров, желательно наблюдение за ходом процессов И-модели;
- 5) сложность или невозможность постановки натурных экспериментов;
- 6) необходимость контроля и анализа очень быстро или медленно протекающих процессов.

Кроме того, И-моделирование позволяет получить решение некоторых задач итерационным методом, т.е. посредством разработки последовательности моделей.

Вначале проектируется и исследуется модель первого порядка сложности. На основе результатов исследования этой модели строится более сложная и полная модель второго порядка сложности. В случае необходимости создаётся модель 3-го порядка сложности. И этот итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будет получена модель, наиболее адекватная для решения поставленной задачи.

Итерационный метод применяют, в частности, тогда, когда для построения сложной и полной модели на первоначальном этапе нет достаточной информации о системе.

Специалистам с высокой математической подготовкой имитационное моделирование представляется иногда грубым силовым приёмом или по-

следним средством решения задачи. Однако несмотря на недостаточную математическую строгость имитационное моделирование является одним из наиболее широко распространенных инструментов в руках исследователя–практика.

Недостатки имитационного моделирования:

- 1) разработка хорошей И–модели часто требует много средств и времени, а также высокооплачиваемых специалистов;
- 2) И–модель в принципе не точна, и исследователь не в состоянии измерить степень этой неточности. Частично это затруднение может быть преодолено путём анализа чувствительности модели к изменению её параметров;
- 3) Результаты имитационного моделирования являются численными и носят частный характер.

6.2. Построение концептуальной модели системы и её формализации

Это первый этап имитационного моделирования. Он, в свою очередь, делится на подэтапы.

1. Постановка задачи моделирования. Она сводится к чёткой формулировке задачи, включая методологию и порядок её решения. В частности, она должна включать в себя следующее:
 - подтверждение существования задачи и необходимости её решения путём моделирования;
 - выбор методики решения задачи с учётом имеющихся ресурсов;
 - определение масштаба задачи и возможности её разбиения на подзадачи;
 - приоритеты решения подзадач;
 - предлагаемые или возможные методы решения;
 - обоснование требований к программно–техническим средствам.
2. Анализ задачи моделирования. Он предусматривает:
 - выбор и определение параметров и переменных модели САУ;
 - выбор критерия (показателя) эффективности процесса функционирования системы;
 - выбор вида аппроксимации процессов для модели;
 - предварительный анализ второго этапа моделирования, который заключается в алгоритмизации модели САУ и её программной реализации;
 - предварительный анализ третьего этапа моделирования, который заключается в получении и анализе результатов моделирования системы.
3. Определение требований к исходной информации и организация её сбора. При определении требований к исходной информации необходимо ответить на три вопроса:
 - 1) какую информацию следует считать необходимой?
 - 2) где можно получить эту информацию?

3) какими методами можно произвести предварительную обработку информации о системе?

Под сбором информации о системе понимается её поиск и оценка на соответствие решаемой задаче. В частности, это: просмотр и анализ источников научно–технической информации (реферативных журналов, оперативной сигнальной информации, технической литературы, научно–технических отчётов); подготовка априорных данных; анализ имеющихся экспериментальных данных.

При отсутствии необходимой информации её источниками могут быть также натурный эксперимент, физическое моделирование и моделирование на ЭВМ.

Собранная информация не всегда имеет вид, удобный для непосредственного применения. Именно поэтому она подвергается предварительной обработке и анализу, в том числе и с помощью ЭВМ [6].

4. Выдвижение гипотез и принятие допущений гипотезы необходимы исследователю для заполнения пробелов в понимании задачи моделирования. В частности, при недостатке исходной информации выдвигают гипотезу относительно возможных результатов моделирования. Справедливость гипотез проверяется по результатам эксперимента с имитационной моделью системы.

Допущения принимают тогда, когда некоторые данные о системе неизвестны или их нельзя получить. А также они могут выдвигаться относительно известных данных, которые играют второстепенную роль. Допущения позволяют упростить модель системы. Однако правомерность их принятия следует многократно проверять.

5. Определение параметров и переменных модели.

Прежде чем перейти к описанию математической модели САУ, необходимо определить её параметры h_k , $k = \overline{1, n_h}$, входные и выходные переменные x_i , $i = \overline{1, n_x}$, y_j , $j = \overline{1, n_y}$, а также воздействия внешней среды v_l , $l = \overline{1, n_v}$.

Конечной целью этого подэтапа является подготовка к построению математической модели системы s .

А для этого необходимо описание всех параметров и переменных. Описание каждого параметра и переменной должно содержать следующее: а) определение и краткую характеристику; б) символ обозначения и единицу измерения; в) месторасположение в модели.

6. Определение структуры и выбор метода построения модели. Они осуществляются с учётом принятых гипотез и допущений на основе: а) формулировки задачи моделирования; б) структуры моделируемой системы и алгоритма её работы; в) воздействий внешней среды; г) выбранных методов и средств решения задачи.

7. Выбор показателя эффективности системы. Показатель эффективности – это интегральный или частный критерий оценки качества функциониро-

вания САУ. Он является функцией параметров и переменных системы и позволяет оценить её реакцию на их изменение.

8. Определение процедуры аппроксимации. Для аппроксимации реальных процессов, протекающих в моделируемой системе, применяются 3–и вида моделей: а) детерминированная; б) вероятностная или стохастическая; в) математического ожидания.

В детерминированной модели отсутствуют случайные элементы (параметры и внешние воздействия).

Такие модели применяются тогда, когда в моделируемой САУ вероятностные факторы либо отсутствуют, либо ими можно пренебречь. Результаты моделирования однозначно определяются по заданной совокупности входных воздействий, параметров и переменных системы.

В вероятностной модели результаты моделирования зависят от случайных факторов. При этом результаты моделирования могут быть определены только в вероятностном смысле. Причём их получают путём статистического моделирования методом Монте–Карло.

В модели математического ожидания присутствуют вероятностные параметры и (или) входные сигналы. Такие модели применяются тогда, когда необходимо определить средние значения выходных переменных. Причём для их определения применение метода Монте–Карло нецелесообразно.

9. Описание концептуальной модели системы. На этом подэтапе проводится подробный анализ задачи моделирования, рассматриваются методы её решения и даётся детальное описание концептуальной модели в абстрактных терминах и понятиях.
10. Для проверки достоверности концептуальной модели используются операции обратного перехода. Это позволяет вернуться от модели к принятым аппроксимациям и рассмотреть снова реальные процессы, протекающие в моделируемой САУ. Проверка достоверности модели должна включать: а) проверку замысла модели; б) оценку достоверности исходной информации; в) рассмотрение постановки задачи моделирования; г) анализ принятых аппроксимаций; д) исследование гипотез и допущений.

6.3. Алгоритмизация модели и её машинная реализация

Это второй этап моделирования, когда абстрактная концептуальная модель воплощается в конкретную машинную модель. Общий замысел модели изображается в виде логической схемы моделирующего алгоритма. Составляется детальное математическое описание. По логической схеме алгоритма составляется схема программы. Она определяет собой интерпретацию логической схемы моделирующего алгоритма на базе конкретного алгоритмического языка. Для начертания этих схем используется набор символов, определяемых соответствующим ГОСТом.

Этап алгоритмизации модели системы и её машинной реализации состоит из следующих подэтапов.

1. построение логической схемы модели. Как правило модель строят по блочному принципу. Это обеспечивает определённую гибкость в процессе её отладки и эксплуатации. При построении модели проводится разбиение процесса функционирования системы на отдельные достаточно автономные подпроцессы. Таким образом модель подразделяется на подмодели, каждая из которых, в свою очередь, может быть разбита на ещё более мелкие элементы.
2. Получение математических соотношений. Одновременно с построением логической схемы модели составляется её математическое описание. Причём математические соотношения записываются в виде явных функций. В то время как на этапе составления концептуальной модели они могли быть представлены в неявном виде. По мере вывода математических соотношений они вносятся в логическую схему модели. Логическая схема модели САУ должна полностью отражать заложенную в ней концепцию, а также иметь обозначение, нумерацию и описание всех блоков с их наименованиями. Причём часть процессов в модели САУ может быть описана аналитически, а другая часть может имитироваться соответствующими алгоритмами.
3. Проверка достоверности логической схемы модели необходима для подтверждения того, что логическая схема модели и используемые в ней уравнения достаточно точно отражают реальные процессы в моделируемой системе. При этом должны быть получены утвердительные ответы на следующие вопросы: 1) позволяет ли замысел модели решить поставленную задачу? 2) достаточно ли точно этот замысел отражён в логической схеме модели? 3) достаточно ли полна логическая схема модели? 4) правильны ли используемые математические соотношения?
4. Выбор вычислительных средств . На этом подэтапе решается вопрос о выборе ЭВМ для реализации модели системы. Это может быть и АВМ, и ЦВМ, и АЦВК. При выборе ЭВМ учитывают следующие требования: а) наличие необходимых программных и технических средств; б) доступность выбранной ЭВМ; в) минимальные трудозатраты при машинной реализации и эксплуатации модели; г) возможность своевременного получения результатов.
5. Составление плана работы по программированию. Он должен включать в себя: а) выбор алгоритмического языка программирования; б) указание типа выбранной ЭВМ; в) оценку примерного объёма оперативной и постоянной памяти; г) ориентировочные затраты машинного времени на моделирование; д) предполагаемые затраты времени на программирование и отладку программ на ЭВМ.
6. Построение схемы программы и проверка её достоверности. Схема программы строится на основе логической схемы модели путём преобразования не столь её содержания, сколько её формы. Если логическая схема от-

ражает процессы, происходящие в модели, то схема программы показывает как эти процессы протекают в ЭВМ.

При построении схемы программы предусматривается также возможность тестирования программы и осуществляется выбор формы представления входных и выходных данных.

Проверка достоверности схемы программы заключается в проверке соответствия каждой её операции аналогичной ей операции в логической схеме модели.

7. Программирование модели и проверка достоверности программы. Программирование осуществляется по построенной и проверенной схеме программы обычно программистом, (без участия разработчика модели).

Проверка достоверности программы и проводится, во-первых, обратным переводом программы в её исходную схему. Во-вторых, решением тестовых задач для отдельных частей программы. В-третьих, моделированием контрольного варианта системы с использованием всей программы в целом.

На этом подэтапе полезно также уточнить оценку затрат машинного времени на один цикл расчётов (“прогон” модели). Это позволит разработчику модели правильно сформулировать требования к точности и достоверности результатов моделирования.

8. Составление технической документации, в которую входит: 1) логическая схема модели; 2) схема программы и принятые обозначения; 3) полный текст программы; 4) перечень входных и выходных величин с пояснениями; 5) инструкция по работе с программой; 6) оценка затрат машинного времени.

6.4. Получение и интерпретация результатов моделирования

На третий, заключительный этап моделирования. Он состоит из следующих подэтапов.

1. Планирование эксперимента с моделью системы. Оно позволяет получить максимальный объём информации о системе при минимальных затратах машинных ресурсов. Причём для получения наиболее эффективного и экономичного плана эксперимента целесообразно использовать статические методы.
2. Проведение рабочих расчётов. Они включают в себя следующее: а) подготовку наборов исходных данных; б) проведение расчётов на ЭВМ; в) получение выходных данных, т.е. результатов моделирования.

Моделирование системы целесообразно проводить в два этапа: сначала контрольные расчёты, а затем рабочие. Причём контрольные расчёты выполняются для проверки машинной модели системы, а также для определения чувствительности выходных величин к изменению исходных данных.

3. Анализ результатов моделирования. Чтобы изучить и проанализировать результаты моделирования необходимо сопоставление входных и выходных данных модели. Поэтому выходная печать должна содержать весь перечень исходных входных и выходных данных с указанием их обозначений и размерности. Для упрощения анализа и обработки результатов моделирования целесообразно использовать имеющиеся стандартные программы, например, статического анализа. Последние, в частности, позволяют определить математическое ожидание, дисперсию, провести дисперсионный и регрессионный анализ и т.д.

Анализ результатов позволяет оценить, насколько они способствуют решению задачи моделирования.

4. Подведение итогов моделирования и выдача рекомендаций. При подведении итогов должны быть отмечены главные особенности полученных результатов. На основе этих результатов делаются выводы о состоятельности принятых гипотез и предположений. В результате подведения итогов моделирования должны быть сформулированы рекомендации по практическому использованию результатов моделирования (например, на этапе проектирования системы).
5. Составление технической документации. Она должна включать в себя: а) план проведения машинного эксперимента; б) наборы исходных данных для моделирования; в) выходные данные по всем циклам вычислений; г) анализ и оценку результатов моделирования; д) выводы по полученным результатам моделирования; е) рекомендации по практическому использованию полученных результатов; ж) указание путей совершенствования модели системы и возможные варианты её дальнейшего использования.

Полный комплект документации по моделированию системы должен содержать техническую документацию по каждому из рассмотренных этапов.

Заметим также, что рассмотренная последовательность этапов и подэтапов моделирования отражает наиболее общий подход к построению и реализации модели системы на ЭВМ.

Далее рассмотрим наиболее важные составляющие процесса моделирования.

6.5. Понятие о планируемом факторном эксперименте с имитационной моделью

Имитационное моделирование – это планируемый факторный эксперимент с имитационной моделью. В процессе эксперимента модель подвергается определенным внешним и параметрическим возмущающим воздействиям x_1, \dots, x_m , которые в математической статистике принято называть факторами.

Факторы бывают управляемыми и неуправляемыми. *Управляемыми факторами* являются те, которые в процессе эксперимента можно изменять

от опыта к опыту по заданной программе, а в течение самого опыта остаются постоянными. В качестве *неуправляемых факторов* в имитационной модели применяются, как правило, стохастические параметры и переменные (сигналы), с помощью которых имитируются, в частности, шумы и помехи реальных систем управления.

Реакция (отклик) модели на воздействия факторов является случайной переменной

$$y_i(\bar{x}) = f_i(\bar{x}_y) + e(\bar{x}_n), \quad (6.1)$$

так как, содержит две составляющие:

$f_i(\bar{x}_y)$ – регулярная составляющая, обусловленная действием управляемых факторов;

$e_i(\bar{x}_n)$ – случайная составляющая (ошибка i -го опыта), обусловленная действием неуправляемых факторов. Предполагается, что она является независимой нормально распределенной случайной величиной с нулевым математическим ожиданием и постоянной дисперсией.

Общая задача планирования имитационного эксперимента заключается в том, чтобы выбрать такой план, который при минимальном числе опытов (прогонов модели) гарантировал бы достоверность и заданную точность статической оценке функции отклика

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_e)$$

Общее число прогонов модели в эксперименте равно произведению $N \cdot n$,

где N – число сочетаний уровней (значений) факторов по стратегическому плану; n – кратность повторных опытов, то есть число прогонов модели для каждого сочетания уровней факторов, вычисленное при тактическом планировании.

Следовательно, общая задача планирования эксперимента объединяет в себе задачу стратегического планирования, которая заключается в определении числа реализуемых сочетаний уровней факторов, и задачу тактического планирования, то есть вычисления кратности повторных опытов.

Заметим, что если процессы в исследуемой САУ аппроксимируются детерминированной моделью, то повторные опыты не требуются. Если они аппроксимируются моделью математического ожидания, то достаточно небольшого числа повторных опытов. Если применяется вероятностная модель, то для оценки дисперсии выходной величины требуется сравнительно большое, а для оценки функции распределения вероятностей – очень большое число повторных опытов.

Планирование имитационного эксперимента возможно лишь при условии, что управляемые факторы, во-первых, являются независимыми, то есть должна существовать возможность установления фактора на любом уровне вне зависимости от уровней других факторов.

Во-вторых, они должны быть однозначными, ибо очень трудно управлять фактором, который является функцией других факторов.

В-третьих, управляемыми являются все первичные факторы, то есть факторы, в исследовании которых экспериментатор заинтересован непосредственно. Заметим, что вторичными считаются те неуправляемые факторы, влиянием которых пренебречь нельзя.

6.6. Выбор области варьирования факторов и аппроксимации функции отклика

Значения, которые можно принимать в эксперименте каждый фактор x_i ($i = \overline{1, m}$), называются *уровнями*. Каждому фиксированному набору уровней факторов соответствует точка в многомерном пространстве, которое называется *факторным*.

Эксперимент обычно проводится не во всех точках факторного пространства, а только в тех, которые принадлежат допустимой области определения. Например, это выделенный прямоугольник для случая двух факторов x_1 и x_2 .

На рис. 6.1 изображена также геометрическая интерпретация функции отклика – поверхность отклика ABCD, каждая точка которой соответствует определенному сочетанию значений факторов.

В качестве области варьирования факторов для проведения эксперимента может выбираться или вся их допустимая область, в случае если решается задача построения интерполяционной модели, то есть уравнения, аппроксимирующего функцию отклика, или такая локальная подобласть из допустимой области, которая имеет по априорным данным наибольшее (наименьшее) значение параметра оптимизации $j(\bar{x}) = j\{y(\bar{x})\}$, в случае если решается задача параметрической оптимизации.

Если центру области варьирования факторов соответствует нулевой уровень факторов (точка O' на рис.6.1), то максимальным значениям факторов из этой области соответствуют верхние уровни факторов, а минимальным значениям – нижние уровни факторов.

Разность между верхним и нулевым уровнями или нулевым и нижним уровнями фактора называют *интервалом варьирования фактора*.

При выборе интервалов варьирования факторов, то есть размеров области варьирования факторов необходимо учитывать точность фиксации уровней факторов, степень кривизны поверхности отклика и диапазон изменения параметра оптимизации (функции отклика). В частности, если диапазон из-

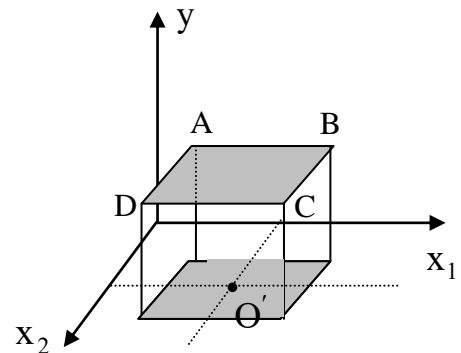


Рис. 6.1

менения параметра оптимизации является узким, то есть несущественно отличается от ошибки опыта (см. соотношение (6.1)), то интервалы варьирования факторов следует выбирать средними (10÷30 % от области определения) или даже широкими (более 30 % от области определения). Если же диапазон изменения параметра оптимизации является широким или степень кривизны поверхности отклика достаточно высока, то интервал варьирования факторов целесообразно выбрать узкими (до 10 % от области определения).

При выборе аппроксимации функции отклика исходят из того, чтобы интерполяционная модель (аппроксимирующее уравнение), была достаточно простой и адекватной. Модель является адекватной, если предсказываемое ею значение отклика отличается от фактического не более чем на некоторую заранее заданную величину.

Что касается простоты модели, то на основе результатов многочисленных экспериментов можно считать условно, что самыми простыми моделями являются алгебраические полиномиальные уравнения. Причем такие уравнения могут иметь практически любую степень. Например, в случае двух факторов полиномиальное уравнение:

- нулевой степени имеет вид: $y = b_0$;
- первой степени: $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$;
- второй степени: $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2$.

Из представленных уравнений видно, что чем выше степень уравнения, тем больше оно содержит коэффициентов. Но чем больше коэффициентов, тем больше требуется число опытов эксперимента, по результатам которых и вычисляются коэффициенты аппроксимирующего уравнения.

Учитывая это, а также то, что имитационный эксперимент является, как правило, многоэтапным, на первом этапе функция отклика аппроксимируется полиномиальным уравнением первой степени.

В случае решения задачи параметрической оптимизации такое уравнение является адекватным, так как поверхность отклика в этом случае предполагается гладкой и выпуклой (вогнутой). В то же время уравнение первой степени содержит минимально возможное число коэффициентов для того, чтобы определить направление градиента функции отклика.

При решении задачи построения интерполяционной модели функции отклика необходимо последовательно, от этапа к этапу, увеличивать степень полиномиального уравнения до тех пор, пока модель не окажется адекватной. Заметим, что если в этом случае адекватной оказывается линейная или неполная квадратичная модель, то ее построение аналогично построению модели в задаче оптимизации.

6.7. План полного факторного эксперимента

Эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания уровней факторов, называется полным факторным экспериментом (ПФЭ).

Первым этапом планирования эксперимента основан на варьировании факторов на двух уровнях: верхнем и нижнем. Поэтому если всего факторов k , то число опытов в ПФЭ равно $N = 2^k$. Например, если факторов 2, то число опытов $N = 2^2 = 4$.

Условия эксперимента принято записывать в виде таблицы, которая называется *матрицей планирования эксперимента*. Строки матрицы соответствуют различным опытам, а столбцы – значениям факторов. Причем для упрощения записи и обработки экспериментальных данных для факторов вводятся такие масштабы, чтобы верхний уровень соответствовал: +1, а нижний уровень: -1. Это можно сделать с помощью преобразования:

$$\tilde{x}_j = \frac{x_j - x_{j0}}{I_j},$$

где \tilde{x}_j, x_j – соответственно кодированное и натуральное значения j -го фактора; I_j, x_{j0} – интервал варьирования и натуральное значение основного уровня.

Матрица планирования ПФЭ для двух факторов приведена в табл. 6.1.

Таблица 6.1

Уровень	Факторы	
	\tilde{x}_1	\tilde{x}_2
Основной x_{j0}	2	5
Интервал I_j	1	2
Верхний	3	7
Нижний	1	3
№ опыта	x_1	x_2
1	-1	-1
2	+1	-1
3	-1	+1
4	+1	+1

При составлении матрицы планирования для двух факторов все возможные комбинации уровней факторов легко находятся прямым перебором. При большом числе факторов можно использовать правило чередования знаков: в первом столбце знаки меняются поочередно, во втором – через два, в третьем – через 4, в четвертом – через 8 и т.д.

Основные свойства ПФЭ 2^k

1. Свойство *симметричности*: алгебраическая сумма элементов вектор-столбца любого фактора равна $\sum_{i=1}^N x_{ji} = 0$, где j – номер фактора; i – номер опыта.
2. Свойство *нормировки*: сумма квадратов элементов каждого вектор-столбца равна числу опытов: $\sum_{i=1}^N x_{ji}^2 = N$.
3. Свойство *ортогональности*: сумма почленных произведений любых двух вектор-столбцов равна $\sum_{i=1}^N x_{ji} \cdot x_{li} = 0$.
4. Свойство *ротатабельности*: точность предсказания значений параметра оптимизации (функции отклика) одинакова на равных расстояниях от центра эксперимента и не зависит от направления.

По результатам проведения ПФЭ можно найти коэффициенты как линейного аппроксимирующего функцию отклика уравнения

$$y = b_0 + b_1 x_1 + \dots + b_k x_k, \quad b_j = \sum_{i=1}^N \frac{x_{ji} y_i}{N} \quad (j = 0, 1, \dots, k) \quad (6.2)$$

так и нелинейного аппроксимирующего уравнения с парными $x_1 x_2$, тройными $x_1 x_2 x_3$ и другими эффектами взаимодействия факторов. Причем при вычислении коэффициентов взаимодействия факторов с их вектор-столбцами обращаются также, как с вектор-столбцом простого фактора. Для ПФЭ 2^2 матрица планирования с учетом взаимодействия факторов приведена в таблице 6.2.

Заметим, что для удобства вычисления коэффициента b_0 в матрицу вводится фиктивный единичный вектор-столбец x_0 .

Таблица 6.2

№ опыта	x_0	x_1	x_2	$x_1 x_2$	y
1	+1	-1	-1	+1	y_1
2	+1	+1	-1	-1	y_2
3	+1	-1	+1	-1	y_3
4	+1	+1	+1	+1	y_4

6.8. Планы дробных факторных экспериментов

Количество опытов в ПФЭ значительно превышает число определяемых коэффициентов линейного уравнения отклика, то есть ПФЭ обладает большой избыточностью опытов. Попробуем минимизировать число опытов в эксперименте. Для этого запишем уравнение модели функции отклика для ПФЭ 2^2 (см. табл. 6.2) в виде неполного квадратного уравнения:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2.$$

ПФЭ 2^2 позволяет вычислить четыре коэффициента. Но если модель линейна, то в $b_{12} \approx 0$, то есть остается одна степень свободы, которую и можно использовать для минимизации числа опытов. В частности, вектор-столбец x_1x_2 можно использовать для нового фактора x_3 . Следовательно, чтобы сократить число опытов, необходимо новому фактору присвоить вектор-столбец матрицы, который принадлежит взаимодействию факторов и которым можно пренебречь.

Однако поставив четыре опыта для оценки влияния на отклик трех факторов, то есть воспользовавшись половиной ПФЭ 2^3 , оценки b_1, b_2 и b_3 будут уже не разделенными оценками «истинных» коэффициентов линейной модели:

$$\eta = \beta_0 + \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \beta_3x_3 \quad (6.3)$$

Эти оценки будут смешанными:

$$b_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{23}; \quad b_2 \rightarrow \beta_2 + \beta_{13}; \quad b_3 \rightarrow \beta_3 + \beta_{12},$$

так как элементы столбца x_2x_3 совпадают с элементами столбца x_1 , элементы x_1x_3 совпадают с элементами x_2 и элементы x_1x_2 с элементами x_3 .

Таким образом, эффекты взаимодействия смешиваются с основными эффектами. Но так как постулируется линейная модель, то предполагается, что эффекты взаимодействия близки к нулю и поэтому

$$b_1 \approx \beta_1, b_2 \approx \beta_2, b_3 \approx \beta_3.$$

Матрицу из четырех опытов для трехфакторного эксперимента обозначают 2^{3-1} и называют полурепликой от ПФЭ 2^3 . Матрица из восьми опытов для четырехфакторного эксперимента будет полурепликой 2^{4-1} от ПФЭ 2^4 и четверть-репликой 2^{5-2} от полного пятифакторного эксперимента 2^5 .

Определение: Символическое обозначение единичного равенства с правой частью в виде произведения факторов, которое образует в матрице вектор-столбец из элементов одного и того же знака, называется *определяющим контрастом*.

Если обе части определяющего контраста умножить на какой-либо основной фактор, то получится соотношение, которое показывает с каким из эффектов взаимодействия смешан данный фактор. Такое соотношение называется генерирующим соотношением.

Пример: Пусть выбрана полуреплика 2^{3-1} от ПФЭ 2^3 .

Таблица 6.3

№ опыта	x_1	x_2	x_3	$x_1x_2x_3$
1	—	—	+	+
2	+	—	—	+
3	—	+	—	+
4	+	+	+	+

Тогда определяющий контраст имеет вид: $1 = x_1x_2x_3$.

Генерирующее соотношение для

$$\begin{aligned}x_1: & \quad x_1 = x_2 x_3; \\x_2: & \quad x_2 = x_1 x_3; \\x_3: & \quad x_3 = x_1 x_2.\end{aligned}$$

Это означает, что коэффициенты линейного уравнения, аппроксимирующего функцию отклика, будут смешанными оценками:

$$b_1 = \beta_1 + \beta_{23}; \quad b_2 = \beta_2 + \beta_{13}; \quad b_3 = \beta_3 + \beta_{12}.$$

Все удобные реплики любого плана эксперимента отличаются друг от друга *разрешающей способностью*, которая равна наибольшему числу факторов в определяющем контрасте.

Реплики с наибольшей разрешающей способностью являются наиболее эффективными, так как их линейные эффекты смешаны с взаимодействиями более высокого порядка.

Заметим также, что при построении планов с репликами высокой дробности (четверть-реплика и выше) система смешивания линейных эффектов с эффектами взаимодействия факторов определяется умножением линейного эффекта на обобщающий определяющий контраст.

В свою очередь обобщающий определяющий контраст находится перемножением по два, три и т. д. Исходных определяющих контрастов.

Пример: Пусть для четверть-реплики от ПФЭ 2^5 использованы генерирующие соотношения:

$$x_4 = x_1 x_3 \quad \text{и} \quad x_5 = x_1 x_2 x_3.$$

Тогда исходными определяющими контрастами являются:

$$1 = x_1 x_3 x_4 \quad \text{и} \quad 1 = x_1 x_2 x_3 x_5,$$

а обобщающий определяющий контраст имеет вид:

$$1 = x_1 x_3 x_4 = x_1 x_2 x_3 x_5 = x_2 x_4 x_5.$$

Система смешивания для x_1 : $x_1 = x_3 x_4 = x_2 x_3 x_5 = x_2 x_4 x_5 x_1$;

Для x_2 : $x_2 = x_1 x_3 x_4 x_5 = x_1 x_3 x_5 = x_4 x_5$ и т. д.

6.9. Тактическое планирование эксперимента

Поскольку имитационное моделирование представляет собой в общем случае статистический эксперимент с вероятностной моделью, то при его поведении необходимо обеспечить не только достоверность, но и заданную точность результата.

Но точность оценки функции отклика характеризуется ее дисперсией, в частности дисперсией воспроизводимости. Поэтому основу тактического планирования эксперимента составляют методы понижения дисперсии.

Одним из таких методов является многократное повторение прогонов модели для каждого сочетания уровней факторов. Такой подход получил название *простой случайной выборки* (ПСВ). По результатам повторных опытов вычисляется их среднее арифметическое

$$\bar{y}_i = \frac{1}{n} (y_{i1} + y_{i2} + \dots + y_{in}) = \sum_{q=1}^n \frac{y_{iq}}{n}$$

и дисперсия повторных (параллельных) опытов

$$D_i = \sum_{q=1}^n \frac{(y_{iq} - \bar{y}_i)^2}{n-1} \quad (6.4)$$

где n – число параллельных опытов i -ого опыта стратегического плана;
 $(n-1)$ – число степеней свободы, одна степень свободы используется для вычисления среднего \bar{y}_i .

Дисперсия всего эксперимента, которую называют *дисперсией воспроизводимости* эксперимента получается в результате усреднения дисперсий всех опытов, то есть:

$$D_y = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{q=1}^n (y_{iq} - \bar{y}_i)^2}{N(n-1)} \quad (6.5)$$

где N – число сочетаний уровней факторов в матрице стратегического плана эксперимента.

Если дисперсия воспроизводимости (6.5) является *однородной*, (то есть отношение максимального к минимальному из значений (6.4) меньше табличного значения критерия Фишера) и величина ее априорно известна, то число параллельных опытов эксперимента « n » можно найти по формуле:

$$n = \frac{t_{\Phi}^2 D_y}{\Delta y^2}, \quad (6.6)$$

где t_{Φ} – квантиль нормального распределения вероятностей, который находится из специальных таблиц;

Δy – доверительный интервал для математического ожидания функции отклика, которое с вероятностью $(1-\alpha)$ лежит в интервале $\eta + \Delta y$, причем α – уровень зависимости, обычно $\alpha = 0,05$; η – истинное значение функции отклика (см.(6.3)).

Если значение дисперсии D_y априори неизвестно, то целесообразно выполнить пробную серию из ℓ параллельных опытов для любого сочетания уровней факторов и вычислить выборочную дисперсию

$$D_i^* = \frac{1}{\ell-1} \sum_{q=1}^{\ell} (y_{iq} - \bar{y}_i)^2,$$

где \bar{y}_i – выборочное среднее по результатам ℓ опытов.

Значение D_i^* подставляют в (6.6) вместо D_y и получают предварительную оценку числа параллельных опытов. Затем выполняют оставшиеся $n - \ell$ прогонов модели и уточняют оценку числа параллельных опытов.

6.10. Метод наименьших квадратов и регрессионный анализ результатов эксперимента

Из многочисленных статических методов обработки результатов эксперимента наибольшее распространение получил *метод наименьших квадратов* (МНК).

Рассмотрим линейную модель (уравнение регрессии) функции отклика с одним фактором

$$y = b_0 + b_1 x_1 \quad (6.7)$$

Это уравнение прямой линии. И если бы все экспериментальные точки лежали на ней, то для каждой из них было бы справедливо равенство

$$y_i - b_0 - b_1 x_{1i} = 0 \quad (i = 1, N)$$

На практике между экспериментальным и вычисленным по уравнению регрессии значениями y существует невязка

$$\zeta_i = y_i - b_0 - b_1 x_{1i} \quad (6.8)$$

В соответствии с МНК коэффициенты уравнения (6.7) находят из условия минимизации суммы невязок (6.8)

$$u = \sum_{i=1}^N \zeta_i^2 \rightarrow \min$$

или, что то же самое

$$u = \sum_{i=1}^N (y_i - b_0 - b_1 x_{1i})^2 \rightarrow \min \quad (6.9)$$

Очевидно, что соотношение (6.9) будет выполняться, если

$$\frac{\partial u}{\partial b_0} = 0 \quad u \quad \frac{\partial u}{\partial b_1} = 0,$$

то есть

$$-2 \sum_{i=1}^N (y_i - b_0 - b_1 x_{1i}) = 0 \quad u \quad -2 \sum_{i=1}^N (y_i - b_0 - b_1 x_{1i}) x_{1i} = 0 \quad (6.10)$$

Преобразуем (6.10):

$$\begin{vmatrix} N & \sum_{i=1}^N x_{1i} \\ \sum_{i=1}^N x_{1i} & \sum_{i=1}^N x_{1i}^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_0 \\ b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^N y_i \\ \sum_{i=1}^N y_i x_{1i} \end{vmatrix},$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= \frac{\sum_{i=1}^N y_i \sum_{i=1}^N x_{1i}^2 - \sum_{i=1}^N y_i x_{1i} \sum_{i=1}^N x_{1i}}{N \sum_{i=1}^N x_{1i}^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_{1i} \right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N} ; \\ b_1 &= \frac{N \sum_{i=1}^N y_i x_{1i} - \sum_{i=1}^N x_{1i} \sum_{i=1}^N y_i}{N \sum_{i=1}^N x_{1i}^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_{1i} \right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^N y_i x_{1i}}{N} ; \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

где в силу свойств симметричности и нормировки матрицы планирования $\sum_{i=1}^N x_{1i} = 0$ и $\sum_{i=1}^N x_{1i}^2 = N$.

Можно также показать, что для любого числа факторов коэффициенты уравнения регрессии будут вычисляться по аналогичным (6.11) формулам.

Однако никакие результаты вычислений нельзя использовать до тех пор, пока они не проверены. В частности, после вычисления коэффициентов b_i требуется проверка адекватности полученной модели функции отклика (уравнения регрессии), а также проверка значимости вычисленных коэффициентов. Это осуществляется с помощью статических методов, в частности, с помощью регрессионного анализа, в основе которого лежит МНК.

Но регрессионный анализ применим только при выполнении следующих постулатов:

1. Функция отклика 'у' есть случайная величина с нормальным законом распределения. Выполнимость этого постулата проверяется стандартными статистическими тестами. Например, с помощью критерия согласия Пирсона (X^2 -критерия).
2. Дисперсия 'у' не зависит от абсолютной величины 'у'. Проверяется это с помощью критерия однородности дисперсий.
3. Значения факторов есть неслучайные величины. Это означает, что точность фиксации уровней факторов должна быть выше ошибки воспроизводимости.
4. Факторы некоррелированы между собой, то есть независимы друг от друга. Этот постулат всегда выполняется в силу ортогональности матрицы планирования.

6.11. Проверка адекватности уравнения регрессии и значимости его коэффициентов

Проверка адекватности уравнения регрессии – это проверка того, достаточно ли достоверно и точно оно аппроксимирует функцию отклика.

Для проверки гипотезы об адекватности можно использовать критерий Фишера. Согласно этому критерию модель (уравнение регрессии) можно считать адекватной с соответствующей доверительной вероятностью, если табличное значение F-критерия больше рассчитанного по формуле:

$$F = \frac{D_{ад}}{D_y}, \quad (6.12)$$

где D_y – дисперсия воспроизводимости (см. выражение (6.5)) со своим числом степеней свободы $N(n-1)$, причем n – число параллельных опытов;

$D_{ад}$ – дисперсия адекватности с числом степеней свободы f , равным разности между числом опытов в матрице стратегического плана N и числом коэффициентов уравнения регрессии,

$$D_{ад} = \frac{\sum_{i=1}^N \Delta y_i^2}{f} \quad (6.13)$$

Например, число степеней свободы дисперсии адекватности линейного уравнения регрессии для ПФЭ 2^3 равно $f = N - (3 + 1) = 8 - 4 = 4$.

Проверку значимости коэффициентов уравнения регрессии осуществляют по t-критерию Стьюдента. Согласно этому критерию коэффициент b_j значим, если табличное значение t-критерия при заданном уровне значимости α и соответствующем числе степеней свободы меньше вычисленного по формуле

$$t = \frac{|b_j|}{\sigma_{b_j}},$$

где σ_{b_j} – квадратичная ошибка коэффициента b_j ,

$$\sigma_{b_j} = \sqrt{\frac{D_y}{N}}.$$

6.12. Принятие решений после построения модели (уравнения регрессии)

Коэффициенты уравнения регрессии являются частными производными функции отклика по соответствующим переменным. Их геометрический смысл – это тангенсы углов наклона к соответствующим координатным осям касательной к функции отклика гиперплоскости.

Заметим, что чем больше коэффициент, тем сильнее соответствующий ему фактор влияет на изменение функции отклика.

Поэтому решение после построения уравнения регрессии зависит от того, адекватно оно или нет, значимы ли его коэффициенты, какая задача решается: построения интерполяционной формулы или параметрической оптимизации. А также от того, близка или удалена область оптимума, если ре-

шается задача параметрической оптимизации. Рассмотрим основные варианты возможных решений.

1. Решается задача параметрической оптимизации.

Ситуация 1.1: модель адекватна и значимы все коэффициенты регрессии.

Варианты решения: а) движение по градиенту; б) окончание исследования, если область оптимума близка; в) переход к плану 2-го порядка, если требуется исследование области оптимума.

Ситуация 1.2: модель адекватна, но не значимы все коэффициенты регрессии.

Варианты решения: а) увеличение интервалов варьирования факторов; б) перенос центра плана; в) увеличение числа параллельных опытов; г) окончание исследования, если область оптимума близка или переход к плану 2-го порядка.

Ситуация 1.3: модель неадекватна или адекватна, но не значима лишь часть коэффициентов регрессии.

Варианты решения: а) один из вариантов решения в ситуации 1.2; б) достройка плана для учёта эффектов взаимодействия или достройка его до реплики меньшей дробности; в) движение по градиенту по значимым факторам.

2. Решается задача построения интерполяционной модели.

Ситуация 2.1: модель адекватна.

Решение одно: окончание исследования.

Ситуация 2.2: модель неадекватна.

Варианты решения: а) изменение интервалов варьирования факторов; б) достройка плана для учёта эффектов взаимодействия или достройка его до реплики меньшей дробности; в) преобразование зависимой и независимой переменных, например, $J = \ln y$ или $J = \arcsin \sqrt{y}$; г) разбивка исследуемой области факторного пространства на подобласти и исследование каждой из них в отдельности.

6.13. Крутое восхождение при решении задач параметрической оптимизации

Коэффициенты уравнения регрессии являются оценками составляющих градиента функции отклика (параметра оптимизации). Поэтому если изменять независимые переменные (факторы) пропорционально величинам коэффициентов регрессии, то можно двигаться в направлении градиента функции отклика. Такое движение принято называть крутым восхождением.

При крутом восхождении не значимые факторы стабилизируются на любом уровне, например, основном.

Значимые факторы надо уменьшать (увеличивать), если соответствующие коэффициенты регрессии отрицательны (положительны) и ищется максимум функции отклика. И значимые факторы надо увеличивать (уменьшать), если ищется минимум функции отклика.

Расчёт крутого восхождения сводится к тому, что выбирается шаг движения по одному из значимых факторов, а шаги по другим факторам вычисляются пропорционально произведениям их интервалов варьирования на соответствующий коэффициент регрессии.

Пример расчёта крутого восхождения для ПФЭ 2^2 приведён в таблице 6.4.

Таблица 6.4.

Уровень	\tilde{x}_1	\tilde{x}_2	
\sim Основной x_{j0}	1,5	7,0	
Интервал варьирования I_j	0,5	1,0	
верхний	2,0	8,0	
нижний	1,0	6,0	
Опыты	x_1	x_2	y
1	—	—	95,0
2	+	—	90,0
3	—	+	85,0
4	+	+	82,0

Расчёт крутого восхождения

b_j	-2.0	-4.5	
$b_j * I_j$	-1.0	-4.5	
Шаг при изменении \sim x_2 на 0,5	-0,11	-0,5	
Округление	-0,1	-0,5	
Опыты	\tilde{x}_1	\tilde{x}_2	\tilde{y}
5	1,4	6,5	99
6	1,3	6,0	97
7	1,2	5,5	95,95
8	1,1	5,0	97,6
9	1,0	4,5	

Опыты крутого восхождения 5÷9 часто называют мысленными. Крутое восхождение считается эффективным, если хотя бы один результат из реализованных мысленных опытов будет лучше, чем наилучший из опытов 1÷4.

Заметим так же, что если модель адекватна, то крутое восхождение начинают с того мысленного опыта, условия которого выходят за область экс-

перимента хотя бы по одному из факторов. В таблице 6.4. это опыт №7, значение второго фактора для которого лежит вне области эксперимента опытов 1÷4.

Крутое восхождение может воспроизводиться многократно пока не будет достигнута почти стационарная область. Поэтому после реализации первой серии мысленных опытов 5÷9, условие опыта с наилучшим результатом могут быть приняты за основной уровень факторов в следующей серии опытов крутого восхождения.

Тем не менее даже многократное крутое восхождение не гарантирует попадание в точку экстремума функции отклика. Поэтому если требуется изучить область оптимума, то линейный план эксперимента достраивается до плана второго порядка и результат эксперимента представляется в виде полинома второй степени. Т.е. для описания области оптимума используют методы нелинейного планирования эксперимента [21].

7. СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НА ЭВМ

7.1. Методы статистического моделирования. Метод Монте–Карло

Методы статистического моделирования могут применяться для исследования как аналитических, так и имитационных моделей систем. Для реализации этих методов необходимы: модель исследуемой системы, модель случайных воздействий и программа расчёта на ЭВМ статистических характеристик выходных величин системы.

Методы статистического моделирования используют в двух основных вариантах [7].

1. Если моделируемая система и её показатель эффективности являются стационарными, то осуществляется один прогон модели (один опыт) и ПЭ определяется по результатам одного этого опыта путём их усреднения по времени.
2. Если моделируемая система или её показатель эффективности являются нестационарными, то осуществляется целая серия независимых опытов (прогонов модели) и ПЭ определяется по результатам серии опытов путём их усреднения по совокупности.

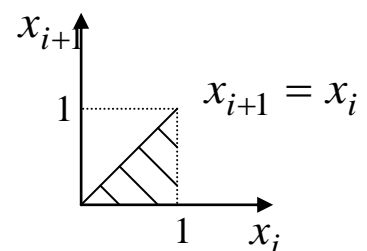
Этот вариант статистического моделирования называют методом статистических испытаний Монте–Карло. С помощью метода Монте–Карло можно вычислять сложные интегралы, решать дифференциальные уравнения и осуществлять статистическое моделирование как нестационарных, так и стационарных стохастических, а также детерминированных систем. Правда при исследовании детерминированной системы она заменяется эквивалентной стохастической. Причём выходные характеристики последней совпадают с выходными характеристиками детерминированной системы. Естественно, что при такой системе в место точного решения задачи получается приближенное. Но погрешность решения уменьшается с увеличением числа статистических испытаний модели системы.

Для иллюстрации сущности метода Монте–Карло рассмотрим один из простейших примеров. Пусть необходимо вычислить методом статистического моделирования определенный интеграл

$$y = \int_0^1 x \, dx .$$

Для решения этой детерминированной задачи можно построить стохастическую модель, выходная величина которой приблизительно равна искомой y (рис.7.1). На рис.7.1 приняты следующие обозначения:

ГСЧ – генератор случайных чисел формирует N пар равномерно распределенных случайных чисел в интервале $[0,1]$;



БЛ – блок логики, выходная величина которого

$$\gamma_i = \begin{cases} 1, & \text{если } x_{i+1} \leq x_i; \\ 0, & \text{если } x_{i+1} > x_i; \end{cases}$$

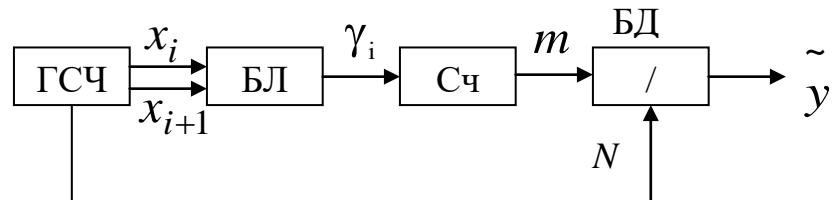


Рис. 7.1.

Сч – счетчик, выходная величина которого

$$m = \sum_{i=1}^N \gamma_i;$$

БД – блок деления, на выходе которого $\tilde{y} = \frac{m}{N}$.

В частности, если $N=80$ и $m=41$, то приближенное значение интеграла, вычисленное с помощью метода Монте – Карло, равно: $\tilde{y} = 0,5125$. Точное же значение $y=0,5$. При $N \rightarrow \infty$: $\lim [y - \tilde{y}(N)] = 0$, то есть погрешность решения стремится к нулю.

7.2. Базовые и производные случайные воздействия.

Моделирование случайных событий

Случайные воздействия в зависимости от их природы могут быть отражены в стохастической модели САУ как случайные события, величины (дискретные или непрерывные) или как случайные функции (процессы). Традиционный способ программной имитации случайных воздействий на ЭВМ сводится к генерированию базовых воздействий. А затем к их последующему функциональному преобразованию.

Наиболее удобным при цифровом моделировании базовым воздействием является последовательность случайных чисел, имеющих равномерное распределение на интервале $[0,1]$. Причем числа, генерируемые программно на ЭВМ называются псевдослучайными. Однако их статические свойства совпадают со свойствами «истинно» случайных чисел. В стандартных программах для ЭВМ применяются различные способы программной генерации случайных чисел. Рассмотрим один из таких способов. Пусть u_0 – нечетное число, например, с пятью значащими цифрами $u_0 = 0,11111$. И $k = 8t \pm 3$, где t – целое число, например, $t=1$. Тогда очередное случайное число – это по-

следние пять значащих цифр числа $u_i = ku_{i-1}$, например, при $i = 1: u_1 = ku_0 = (8 - 3) \cdot 0,11111 = 0,55555$.

Для моделирования случайного события A , вероятность которого P , достаточно сформировать одно число r , равномерно распределенное на интервале $[0,1]$.

При попадании r в интервал $[0,P]$ можно считать, что событие A наступило, в противном случае – не наступило, то есть

$$A = \begin{cases} 1, & \text{если } r \in [0, P]; \\ 0, & \text{если } r > P. \end{cases}$$

7.3. Моделирование случайных величин.

Метод обратных функций

При моделировании дискретной случайной величины ξ , которая может принимать « n » значений a_1, \dots, a_n с вероятностями p_1, \dots, p_n , $\sum_{i=1}^n P_i = 1$, используется следующий метод.

Отрезок $[0,1]$ разбивается на « n » отрезков $\Delta_1, \dots, \Delta_n$, длина каждого из которых равна соответствующей вероятности P_1, \dots, P_n . Далее формируется (разыгрывается) число $r \sim \text{Rav } [0,1]$ и случайной величине присваивается значение $\xi = a_i$, если $r \in \Delta_i$.

Для моделирования непрерывных случайных величин с заданным законом распределения известно несколько методов: нелинейного преобразования (или обратных функций), Неймана, табличный, суперпозиции и др. Рассмотрим некоторые из них.

Метод обратных функций. Он основан на следующей теореме: если случайная величина y имеет дифференциальный закон распределения $f_y(y)$, то случайная величина

$$x = \int_{-\infty}^y f_y(y) dy \quad (7.1)$$

имеет равномерный закон распределения в интервале $[0,1]$.

Если для случайной величины y задан интегральный закон распределения $F_y(y)$, то

$$x = F_y(y) \quad (7.2)$$

Для получения алгоритма преобразования величины x с равномерным законом распределения в случайную величину y с заданным законом достаточно решить обратную задачу. То есть уравнение (7.1) или (7.2) необходимо разрешить относительно y :

$$y = F_y^{-1}(x), \quad (7.3)$$

где $F^{-1}(x)$ – функция, обратная функции $F(x)$.

Пример: Найдем закон преобразования случайной величины x с равномерным распределением в случайную величину y с показательным законом распределения

$$f_y(y) = \lambda e^{-\lambda y} \quad (7.4)$$

Выражение (7.1) в этом случае принимает вид

$$\lambda \int_0^y e^{-\lambda y} dy = x.$$

Вычисляя интеграл и разрешая уравнение относительно « y » можно получить, что

$$y = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - x).$$

7.4. Метод Неймана и табличный метод

Метод Неймана. Пусть необходимо получить значения y_1, y_2, y_3, \dots случайной величины y с дифференциальным законом распределения $f_y(y) \leq c$.

Для моделирования функции y сначала производится усечение распределения $f_y(y)$ таким образом, чтобы область возможных значений величины y лежала в интервале $[a, b]$. После этого график функции $f_y(y)$ можно вписать в прямоугольник A со сторонами $(b-a)$ и c . И если отбирать по очереди пары значений x_{2i-1}, x_{2i} $i = 1, 2, 3, \dots$ случайной величины x (с равномерным законом распределения) и, изменяя их масштабы

$$\left. \begin{aligned} x_{2i-1}^* &= a + (b-a)x_{2i-1} \\ x_{2i}^* &= c x_{2i} \end{aligned} \right\}$$

откладывая x_{2i-1}^* и x_{2i}^* соответственно по оси абсцисс и оси ординат, то точки с координатами (x_{2i-1}^*, x_{2i}^*) будут располагаться как над, так и под кривой $f_y(y)$.

Далее выбираются координаты x_{2i-1}^* только тех точек, которые располагаются под кривой $f_y(y)$.

Последовательность выбранных координат x_{2i-1}^* , $i = k, 1, m \dots$ это и есть последовательность значений y_1, y_2, y_3, \dots случайной величины y с заданным дифференциальным законом распределения $f_y(y)$.

Табличный метод. Основан на замене заданного закона распределения случайной величины специальным расчетным соотношением. Такие соотношения получены практически для всех наиболее распространенных видов распределений и приведены в справочной литературе.

Например, для показательного закона распределения

$$y = -\frac{1}{\lambda} \ln x \quad (7.4)$$

где x – равномерно распределенная случайная величина; λ – параметр показательного распределения

$$y = m + \sigma^2 \left(\sum_{i=1}^{12} x_i - 6 \right),$$

где m, σ^2 – параметры нормального распределения.

Заметим также, что для моделирования случайных величин с некоторыми законами распределения иногда удобно использовать преобразование нормально распределенной случайной величины. В частности, случайную величину с показательным законом распределения (7.4) можно получить путем преобразования отобранных пар значений x_{2i-1}, x_{2i} $i = 1, 2, 3, \dots$ случайной величины x (с нормальным законом распределения и параметрами $(0, \sigma^2)$):

$$y_i = x_{2i-1}^2 + x_{2i}^2, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

причем параметр λ показательного распределения (7.4) связан с параметром σ исходного нормального распределения соотношением $\lambda = \frac{\sigma^2}{2}$.

7.5. Моделирование векторных случайных величин и случайных процессов на конечном интервале времени

Задачи моделирования случайных векторов и случайных процессов на интервале $(0, T)$ в принципе не отличаются. Действительно, дискретные реализации случайных процессов можно рассматривать как выборочные значения N -мерных векторов, причем $N = \frac{T}{\Delta t}$.

Для моделирования случайных векторов с заданным многомерным распределением можно применить все тот же метод Неймана.

Пусть $f_y(\bar{y})$ – N -мерная функция плотности вероятности случайного вектора \bar{y} с областью определения $[a_i, b_i]$ случайных координат y_i ($i = \overline{1, N}$). По аналогии с одномерным случаем для формирования реализации вектора \bar{y} на ЭВМ вырабатываются группы по $N+1$ случайных чисел x_1, x_{N+1} равномерно распределенных в интервалах соответственно $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_N, b_N), (0, C)$, причем $C \geq f_y(\bar{y})$.

И в качестве реализации случайного вектора \bar{y} выбираются те реализации вектора $\begin{bmatrix} \tilde{x}_i^\ell \\ x_i \end{bmatrix} \quad (i = \overline{1, N})$, для которых выполняется условие:

$$\tilde{x}_{N+1}^\ell \leq f_y \left(\tilde{x}_1^\ell, \dots, \tilde{x}_N^\ell \right),$$

$$\tilde{x}_i^\ell = \begin{cases} a_i + (b_i - a_i)(x_i^\ell) & \text{при } i = \overline{1, N}; \\ c(x_{N+1}^\ell) & \text{при } i = N+1. \end{cases}$$

Таким образом, в качестве реализаций случайного вектора \bar{y} с заданным законом распределения вероятности, используются координаты точек, равномерно распределенных в $(N+1)$ -мерном объеме под N -мерной поверхностью $f_y(\bar{y})$.

Заметим также, что в современных ППП для статистического моделирования систем управления, и в частности, в MATLAB имеются генераторы случайных величин, в том числе и векторных, более чем с 20-ю различными законами распределения.

7.6. Моделирование типовых случайных процессов

К типовым относятся стационарные нормальные случайные процессы $\xi(t)$ с заданными характеристиками: математическим ожиданием m_ξ , дисперсией σ_ξ^2 , корреляционной функцией $k_\xi(\tau)$ или спектральной плотностью $s_\xi(\omega)$.

Для получения типовых случайных процессов на ЭВМ используют линейное преобразование последовательности $\eta[i]$ независимых нормальных случайных чисел (дискретный белый шум) в случайную последовательность $\xi[i]$, коррелированную по заданному закону. Причём последовательность $\eta[i]$ имеет математическое ожидание $m_\eta=0$, спектральную плотность $s(\omega)=s(0)=\text{const}$, и дисперсию $\sigma_\eta^2 = 1$.

Поэтому для моделирования случайного процесса $\xi(t)$ или точнее последовательность $\xi[i]$ с заданными значениями m_ξ и σ_ξ используют дополнительное преобразование

$$\xi[i] = m_\xi + \sigma_\xi \dot{\xi}[i]. \quad (7.7)$$

В свою очередь для получения центрированного случайного сигнала $\dot{\xi}[i]$, коррелированного по заданному закону, разработанного несколько методов [24]:

- метод рекуррентных алгоритмов;
- метод скользящего суммирования;

– метод формирующего фильтра.

Рассмотрим последний из указанных методов, так как его можно использовать как при цифровом, так и при аналоговом моделировании САУ.

Спектральная плотность стационарного случайного сигнала $s_\xi(\omega)$ на выходе линейного фильтра связана со спектральной плотностью $s_\eta(0)$ входного случайного сигнала и частотной передаточной функцией $\Phi(j\omega)$ фильтра соотношением

$$s_\xi(\omega) = s_\eta(0) |\Phi(j\omega)|^2. \quad (7.8)$$

Если теперь осуществить факторизацию спектральной плотности $s_\xi(\omega)$, т.е. разложить её на комплексно-сопряжённые множители,

$$\frac{s_\xi(j\omega)}{\sqrt{s_\eta(0)}} \cdot \frac{s_\xi(-j\omega)}{\sqrt{s_\eta(0)}} = \Phi(j\omega)\Phi(-j\omega),$$

то передаточная функция линейного формирующего фильтра будет равна

$$\Phi(p) = \frac{s_\xi(p)}{\sqrt{s_\eta(0)}}. \quad (7.9)$$

Заметим, что формирующий фильтр может быть как непрерывным, так и дискретным. Передаточную функцию дискретного фильтра можно получить путём z -преобразования передаточной функции непрерывного фильтра (7.9).

Очевидно, что дискретный фильтр применяется при моделировании дискретных САУ. При моделировании непрерывных систем на ЦВМ применяется непрерывный фильтр (7.9). Шаг дискретности его входного сигнала по времени h должен быть [24]

$$h \leq \frac{2\sqrt{3\varepsilon_*}}{\omega_0},$$

где ε_* – заданное значение относительной погрешности при имитации свойств белого шума,

$$\varepsilon_* \geq \frac{|s_\eta(0) - s_\eta(\omega_0)|}{s_\eta(0)},$$

а величина ω_0 должна быть такой, чтобы диапазон частот $[0, \omega_0]$ перекрывал полосу пропускания исследуемой САУ.

7.7. Общая схема алгоритма статического моделирования

О свойствах случайного процесса $\bar{\eta}(t)$ судят по свойствам случайной последовательности $\bar{\eta}(j\Delta t)$ ($j = \overline{0, k}$) или, иначе говоря, по свойствам R -мерного вектора

$$\bar{\eta} = [\eta(0), \dots, \eta[(k-1)\Delta t], \eta(T_n)],$$

где $T_{\Pi} = k\Delta t$, $R = n(k + 1)$.

Работа исследуемой системы на интервале $(0, T_{\Pi})$ моделируется “ n ”-кратно с использованием независимых реализаций внешних случайных воздействий.

При этом получают “ n ” независимых реализаций \overline{y}_i ($i = \overline{1, n}$) вектора $\overline{\eta}$.

В общем случае программа моделирования содержит 3-и цикла (рис.7.2).

Внутренний цикл (блоки 5–8) позволяет получить последовательность $y_i(t) = y_i(j\Delta t)$ ($j = 0, 1, \dots, k$) значений критерия $\eta(t)$ в моменты времени $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, k\Delta t = T_{\Pi}$. Работу модели на интервале времени $(0, T_{\Pi})$ называют прогоном модели.

В следующем цикле организуется “ n ” – кратное повторение прогона, позволяющее после соответствующей статистической обработки результатов (блок 11) судить об усреднённых характеристиках моделируемого варианта системы. (Если процесс $\eta(t)$ предполагается использовать в качестве входного воздействия в другой блочной или частичной модели, значения $y_i(j\Delta t)$ ($i = \overline{1, n}$; $j = 0, 1, \dots, k$) можно запоминать непосредственно без всякой обработки.

На различных прогонах используют независимые реализации внешних воздействий. При этом оказываются независимыми и реализации $y_i(t)$ и $y_j(t)$ $i \neq j$ критерия эффективности $\eta(t)$.

Окончание исследования очередного варианта системы может определяться не только заданным числом прогонов (как показано на рис. 7.2 (блок 10)), но и заданной точностью результатов (последовательный анализ). Это замечание относится к окончанию прогона (блок 8).

Во внешнем цикле организуется поиск оптимальных параметров системы: блок 11 осуществляет проверку, удовлетворительны ли показатели системы, а блок 1 производит изменение параметров так, чтобы улучшить эти показатели.

Схема на рис. 7.2 позволяет вести статическую обработку в наиболее общем случае, при нестационарном критерии $\eta(t)$. Например, при анализе переходных процессов.

Если свойства моделируемой системы определяется значением критерия $\eta(t)$ в некоторый заданный момент времени (например, при $t = T_{\Pi} = k\Delta t$), то обработка сводится к оценке распределения “ n ”-мерного вектора $\overline{\eta}(T_{\Pi})$ по независимым реализациям $y_i(T_{\Pi})$ $i = \overline{1, n}$, полученным в результате “ n ” прогонов модели – фиксируются независимые реализации случайных величин.

Если система функционирует при стационарных случайных внешних воздействиях, то по истечении некоторого времени $t_0 = k_0\Delta t$ с начала её работы

в системе устанавливается стационарный режим. О нём можно судить по одной, достаточно длинной реализации $y_1(t)$ процесса – критерия $\eta(t)$, стационарного и эргодического на интервале (t_0, T_{Π}) . Для схемы на рис. 7.2 это означает, что средний цикл исключается ($n=1$) и добавляются операторы, позволяющие начать обработку значений $y_1(j\Delta t)$ при $j \geq k_0$. Особенности обработки в этом случае определяются статической зависимостью реализаций $y_i(j\Delta t)$ $j = k_0, k_0+1$

Подготовка к моделированию
очередного варианта САУ

1

7.8. Распределение вероятностей случайных величин

Для случайных величин ξ и η вероятностей её значений эквивалентно заданию так называемой функции распределения $F_\xi(x)$ в точке x есть вероятность того, что случайная величина ξ примет значение, которое меньше или равно x :

$$F_\xi(x) = P\{\xi \leq x\}. \quad (7.10)$$

Функция распределения является полным статистическим описанием случайной величины.

Предел:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P\{x < \xi \leq x + \Delta x\}}{\Delta x} = \frac{dF_\xi(x)}{dx} = f_\xi(x) \quad (7.11)$$

называется плотностью распределения случайной величины, причём

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x f_\xi(t) dt \quad (7.12)$$

Наиболее широко используется гистограмма. При этом плотность распределения является гистограммой возможных значений случайной величины ξ разбиённой на k пересекающихся интервалов

$$\Delta \xi = (\xi_{\max} - \xi_{\min}) / k,$$

причём k рекомендуется выбирать из соображений [24]

Фиксация результатов i -го прогона модели

где ξ_{\max} , ξ_{\min} – соответственно максимальный и минимальный из элементов выборки $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ случайной величины ξ .

Для каждого i -го интервала $\Delta \xi_i$ вычисляется относительная частота попаданий значений величины ξ в этот интервал $\Delta \xi_i$, т.е.

$$Q_i = m_i / N$$

где m_i – число попаданий в i -ый интервал, N – объём выборки.

Обработка результатов
очередного варианта САУ

нет

Исчерпаны ли все ис-
следования?

12

да

Выдача результатов.
Стоп.

13

Гистограмма строится в прямоугольной системе координат. По горизонтальной оси откладываются интервалы возможных значений случайной величины ξ , а по вертикальной – соответствующие этим интервалам относительные частоты ϑ_i .

На основе постоянной гистограммы можно идентифицировать закон распределения исследуемой случайной величины. В справочной литературе имеются графики функций плотности вероятности для всех типовых законов распределения случайных величин.

Для проверки произведённой идентификации закона распределения случайной величины используют статические критерии согласия Колмогорова, Смирнова, Фишера, Пирсона и др. Например, критерий согласия Пирсона основан на определении и сравнении с табличным значения величины

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k (m_i - Np_i)^2 / (Np_i), \quad (7.13)$$

где m_i – число значений случайной величины ξ , попавших в i -й интервал; p_i – вероятность попадания случайной величины в i -й интервал, вычисленная из теоретического распределения; N – объём выборки; k – число интервалов, на которое разбивается область возможных значений случайной величины ξ .

Табличное значение величины χ_0^2 находится в соответствии с числом степеней свободы $f = k - 1$ и выбранной вероятностью того, что $\chi^2 \leq \chi_0^2$.

И если $\chi^2 \leq \chi_0^2$, то произведённая идентификация закона распределения случайной величины подтверждается.

7.9. Основные числовые характеристики плотности вероятности и их оценки [6]

Закон распределения является исчерпывающей вероятностной характеристикой случайной величины. Однако для большого числа практических задач достаточно знать числовые характеристики случайных величин.

К ним относятся 1-й, 2-й, 3-й и 4-й моменты распределения. Первый момент или математическое ожидание случайной величины ξ

$$m_\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) dx \quad (7.14)$$

является её средним значением.

Второй центральный момент или дисперсия

$$D_\xi = \sigma_\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_\xi)^2 f_\xi(x) dx \quad (7.15)$$

характеризует разброс значений случайной величины относительно её математического ожидания.

Третий и четвёртый центральные моменты

$$M_i = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_{\xi})^i f_{\xi}(x) dx, \quad i = 3, 4 \quad (7.16)$$

характеризуют соответственно асимметрию и эксцесс графика плотности распределения. В частности, если $M_3 > 0$, то график асимметричен и его пик смещён влево. Если $M_3 < 0$, то пик смещён вправо.

Если при $\sigma=1$, $M_4 > 3$, то график заострён, а если $M_4 < 3$, то график является пологим.

Для приближённого определения моментов (7.14) – (7.16) по ограниченному числу реализаций (объём выборки N) случайной величины ξ применяют их оценки.

В частности, математическое ожидание m_{ξ} и дисперсию σ_{ξ}^2 оценивают с помощью следующих соотношений [1]:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\xi} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i; \\ S^2 &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\xi_i - \bar{\xi})^2 = \frac{1}{N-1} \left[\sum_{i=1}^N \xi_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^N \xi_i \right)^2}{N} \right]; \end{aligned} \right\} \quad (7.17)$$

Замечание 1: Оценки (7.17) являются состоятельными и несмещёнными. Оценка $\bar{\xi}$ к тому же является эффективной, а оценка S^2 – асимптотически эффективной.

Несмещённость оценки S^2 достигается использованием в знаменателе соответствующей формулы (7.17) величины $f = N - 1$ вместо очевидного на первый взгляд значения N . Число степеней свободы f равно разности между числом экспериментальных значений N и количеством дополнительных параметров, входящих в формулу для вычисления S^2 (в данном случае один параметр $\bar{\xi}$).

Замечание 2: Если оценку оцениваемого параметра Θ обозначить $\hat{\Theta}$, то она является состоятельной, несмещённой и эффективной, если удовлетворяет соответствующим условиям:

$$а) \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\Theta}(N) = \Theta;$$

$$b) \ m_{\hat{\Theta}} = \Theta;$$

$$c) \ \hat{\Theta} = \min \left(\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2, \dots, \hat{\Theta}_i \right).$$

Замечание 3: Для равномерно распределенной в интервале $[0, 1]$ случайной величины плотность вероятности $f_{\xi}(x)=1$ и поэтому ее числовые характеристики можно найти непосредственно из (7.14) – (7.16)

$$m_{\xi} = \int_0^1 x dx = 0,5;$$

$$\sigma_{\xi}^2 = \int_0^1 (x - 0,5)^2 dx = 0,333 - 0,5 + 0,25 = 0,083;$$

$$M_i = \int_0^1 (x - 0,5)^i dx = \begin{cases} 0 & \text{при } i = 3; \\ 0,0125 & \text{при } i = 4. \end{cases}$$

7.10. Оценки математического ожидания, дисперсии и корреляционной функции стационарных случайных процессов

В качестве модели стационарного случайного процесса рассматривается эргодический гауссовский процесс $\xi(t)$. Его реализация имеет конечную длительность T , а его дискретная выборка $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_N$ с шагом $\Delta t = \frac{T}{N}$ содержит $N+1$ дискретное значение.

Оценки математического ожидания такого процесса вычисляются по формуле:

$$\tilde{m} = \begin{cases} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) dt & \text{для непрерывной реализации} \\ \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N \xi_i & \text{для дискретной реализации} \end{cases} \quad (7.20)$$

А оценки корреляционной функции имеют вид:

$$\tilde{K}_{\xi} = \begin{cases} \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} \left(\xi(t) - \tilde{m}_{\xi} \right) \left(\xi(t+\tau) - \tilde{m}_{\xi} \right) dt & \text{для непрер. реализации} \\ \frac{1}{N+1-j} \sum_{i=0}^{N-j} \left(\xi_i - \tilde{m}_{\xi} \right) \left(\xi_{i+j} - \tilde{m}_{\xi} \right) & \text{для дискр. реализации} \end{cases} \quad (7.21)$$

причем в случае дискретной реализации $\tau = j\Delta t$.

В свою очередь при $\tau = 0$ из (7.21) можно определить оценку дисперсии:

$$\tilde{D}_{\xi} = \tilde{\sigma}_{\xi}^2 = \tilde{K}_{\xi}(0) \quad (7.22)$$

Заметим, что для более эффективной организации вычисления $\tilde{K}_\xi(\tau)$ на ЭВМ можно использовать приближенную формулу:

$$\tilde{K}(\tau) = \frac{1}{N+1-j} \sum_{i=0}^{N-j} \tilde{\xi}_i \tilde{\xi}_{i+j} - m_\xi^2 \quad (7.23)$$

Интервал $\Delta t = \frac{T}{N}$ выбирается из условия допустимой погрешности кусочно-линейной аппроксимации $K_\xi(\tau)$.

А длительность реализации процесса T должна быть значительно больше интервала корреляции τ_k : $T = (5 \div 20) \tau_k$.

В свою очередь τ_k можно определить с помощью оценки нормированной корреляционной функции

$$\rho_\xi(\tau) = \frac{\tilde{K}_\xi(\tau)}{\tilde{K}_\xi(0)},$$

в частности, из следующего равенства:

$$|\rho_\xi(\tau_k)| = 0,05.$$

7.11. Оценка спектральной плотности случайных процессов

Из ТАУ известно, что спектральная плотность $S_\xi(\omega)$ связана с корреляционной функцией $K_\xi(\tau)$ преобразованием Фурье

$$S_\xi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_\xi(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau = 2 \int_0^{\infty} K_\xi(\tau) \cos \omega\tau \cdot d\tau.$$

Ее оценка для непрерывной реализации процесса $\xi(t)$, $t \in [0, T]$

$$\tilde{S}_\xi(\omega) = 2 \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) \tilde{K}_\xi(\tau) \cos \omega\tau d\tau. \quad (7.24)$$

Однако график $\tilde{S}_\xi(\omega)$ требует сглаживания. Поэтому вместо (7.24) применяют оценку

$$\tilde{S}_\omega(\omega) = 2 \int_0^M \omega_T(\tau) \tilde{K}_\xi(\tau) \cos \omega\tau d\tau, \quad (7.25)$$

где $\omega_T(\tau)$ – некоторая четная функция (корреляционное окно), например,

$$\omega_T(\tau) = \begin{cases} \frac{1-\tau}{M} & \text{при } \tau \leq M; \\ 0 & \text{при } \tau > M; \end{cases}$$

M – граничная точка интервала отсечения оценки $\tilde{K}_\xi(\tau)$.

Оценка спектральной плотности для дискретной реализации процесса определяется формулой

$$\tilde{S}_{\xi}(\omega) = 2 \Delta t \sum_{j=0}^N \cos(\omega \Delta t j) \left(1 - \frac{j}{N+1}\right) \tilde{K}_{\xi}(j \Delta t). \quad (7.26)$$

Соответственно сглаженная оценка имеет вид

$$\tilde{S}_{\omega}(\omega) = 2 \Delta t \sum_{j=0}^N \omega_N(j) \cos(\omega j \Delta t) \tilde{K}_{\xi}(j \Delta t), \quad (7.27)$$

где $\omega_N(j)$ – корреляционное окно, например,

$$\omega_N(j) = \begin{cases} \frac{1-j}{M} & \text{при } j = \overline{0, M}; \\ 0 & \text{при } j > M; \end{cases}$$

причем $M < N$ – граничная точка отсечения корреляционной функции.

7.12. Оценка точности и достоверности результатов моделирования

Рассмотренные в двух предыдущих параграфах оценки характеристик (параметров) случайных величин и процессов не дают информации о степени близости оценки к истинной характеристике. Поэтому более информативный способ оценивания неизвестных параметров заключается в построении интервала, в котором с заданной степенью достоверности окажется оцениваемый параметр.

Если оцениваемый параметр лежит между функциями выборочного наблюдения $\Gamma_1(\xi_1, \dots, \xi_n)$ и $\Gamma_2(\xi_1, \dots, \xi_n)$, то они называются *доверительными границами*, а интервал (Γ_1, Γ_2) – *доверительным*.

Вероятность того, что оцениваемый параметр находится в интервале (Γ_1, Γ_2) при данных ξ_1, \dots, ξ_n называется *доверительной*

$$P\{\Gamma_1 < \theta \leq \Gamma_2\} = P.$$

При этом ширина доверительного интервала $L = \Gamma_2 - \Gamma_1$ является мерой точности оценивания параметра θ , а доверительная вероятность P характеризует степень достоверности оценки $\hat{\theta}$.

Доверительная вероятность обычно задается заранее в соответствии с требованиями к достоверности $\hat{\theta}$ и не зависит от значений выборки. Чаще всего используют значение $P=0,95$.

При достаточно большом объеме выборки $n \geq 20$ построение доверительных интервалов для математического ожидания m_{ξ} , дисперсии σ_{ξ}^2 и среднего квадратического отклонения σ_{ξ} нормальной случайной величины ξ можно осуществлять с помощью следующих формул:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\bar{\xi} - t_{v,\alpha} S_{\xi}}{\sqrt{n}} < m_{\xi} \leq \bar{\xi} + \frac{t_{v,\alpha} S_{\xi}}{\sqrt{n}}; \\ \frac{v S_{\xi}^2}{\chi_{v,\alpha}^2} < \sigma_{\xi}^2 \leq \frac{v S_{\xi}^2}{\chi_{v,(1-\alpha)}^2}; \\ \sqrt{\frac{v S_{\xi}^2}{\chi_{v,\alpha}^2}} < \sigma_{\xi} \leq \sqrt{\frac{v S_{\xi}^2}{\chi_{v,(1-\alpha)}^2}} \end{aligned} \right\} \quad (7.28)$$

В формулах (7.28) приняты следующие обозначения:

v – число степеней свободы, $v = n - 1$;

α – уровень значимости, $\alpha = 1 - P$;

P – доверительная вероятность;

$t_{v,\alpha}$, $\chi_{v,\alpha}^2$ – табличные пределы указанных величин для распределения соответственно Стьюдента и Пирсона.

Если для оценки плотности вероятности случайной величины ξ используется гистограмма, то для каждого ее i -ого интервала $\Delta\xi$ можно построить доверительный интервал плотности вероятности $f_i(\xi)$ по формуле

$$\frac{1}{\Delta\xi} \left(v_i - 3\sqrt{\frac{v_i(1-v_i)}{N}} \right) < f_i(\xi) \leq \frac{1}{\Delta\xi} \left(v_i + 3\sqrt{\frac{v_i(1-v_i)}{N}} \right), \quad (7.29)$$

где $v_i = \frac{m_i}{N}$, причем m_i – число попаданий в i -й интервал, а N – объем выборки.

7.13. Определение необходимого объема выборки

Из формул (7.28) видно, что при фиксированной доверительной вероятности для достижения заданной точности оценивания параметров случайных величин необходим определенный объем выборки N .

Задавая доверительный интервал δ_{θ} для относительной погрешности оцениваемого параметра θ случайной величины, необходимый объем выборки « N » можно определить из соотношения

$$\delta_{\theta} \geq t_{\varphi} \varepsilon_{\Theta} \quad (7.30)$$

где ε_{Θ} – относительная погрешность оцениваемого параметра Θ ,

$$\varepsilon_{\Theta} = \frac{\left(\hat{\Theta} - \Theta \right)}{\Theta};$$

t_{φ} – квантиль нормального распределения вероятностей, значения которого представлены в табл. 7.1:

Таблица 7.1

P	0,682	0,8	0,9	0,954	0,99
t_{φ}	1	1,28	1,64	2	2,58

Например, относительные погрешности оценок математического ожидания, дисперсии и среднеквадратичного отклонения для нормально распределенной случайной величины ξ определяются по формулам:

$$\varepsilon_m = \frac{1}{\sqrt{n}}; \quad \varepsilon_D = \sqrt{\frac{2}{n-1}}; \quad \varepsilon_{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2n}}; \quad (7.31)$$

Тогда объемы соответствующих выборок можно определить при подстановке (7.31) в (7.30), то есть

$$N \geq \begin{cases} \left(\frac{t_{\varphi}}{\delta_m} \right)^2 & \text{при оценке } m_{\xi}; \\ 2 \left(\frac{t_{\varphi}}{\delta_D} \right)^2 + 1 & \text{при оценке } D_{\xi}; \\ \frac{\left(\frac{t_{\varphi}}{\delta_{\sigma}} \right)^2}{2} & \text{при оценке } \sigma_{\xi}. \end{cases} \quad (7.32)$$

8. ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ СРЕДСТВА

8.1. Вычислительные средства

В практике машинного моделирования САУ используется вычислительная техника трех типов: ЭВМ, АВМ и АЦМК – аналого-цифровые моделирующие комплексы. АЦМК имеет определенные преимущества:

- сочетает быстродействие АВМ и точность ЭВМ;
- позволяет использовать в процессе моделирования реальные натурные части исследуемой САУ;
- обеспечивает гибкость аналогового моделирования благодаря использованию логики и памяти ЭВМ;
- увеличивает быстродействие ЭВМ за счет использования аналоговых подпрограмм;
- осуществляет обработку входной информации о модели САУ как в дискретной, так и непрерывной форме.

Структура технических средств АЦМК представлена на рис.8.1. На рис.8.1 обозначено: РА – реальная аппаратура; БУС – блок управляющих связей.

Возможны также различные варианты построения многомашинных комплексов, в которых используется по несколько АВМ и ЭВМ. Такие комплексы обычно применяются в случаях, когда не хватает производительности одного вычислителя.

Подготовка, запуск, останов и синхронизация работы элементов АЦМК осуществляется, как правило, ЭВМ. Для реализации этих функций применяются специальные управляющие шины и аппаратура стыковки, которые объединены на рис.8.1 в БУС. Пульт оператора в АЦМК представляет собой набор технических средств для организации диалога «оператор – машинный эксперимент».

Задача построения технического обеспечения АЦМК в настоящее время сводится к выбору стандартной аппаратуры и разработке информационных и управляющих связей, реализуемых программно.

Программное обеспечение АЦМК включает в себя следующие комплексы программ:

- планирования машинных экспериментов;
- построения модели системы;
- проведения машинных экспериментов;
- обработки результатов моделирования.

При этом наиболее перспективной формой реализации программного обеспечения АЦМК является построение его в виде набора пакетов прикладных программ, снабженных развитыми средствами генерации, модификации и расширения.

8.2. Понятие о пакетах прикладных программ моделирования

Для повышения эффективности процессов моделирования создаются специальные проблемно-ориентированные комплексы, в том числе и автоматизированные системы моделирования. Они называются пакетами прикладных программ моделирования (ППМ) и являются одной из основных форм специализированного программного обеспечения.

ППМ – это комплекс взаимосвязанных программ моделирования и средств системного обеспечения, предназначенных для автоматизации решения задач моделирования. Они обеспечивают пользователя разнообразным сервисом при подготовке задач моделирования и проведении машинных экспериментов. Благодаря этому достигается быстрота и удобство решения задач моделирования систем управления.

В структуре ППМ можно выделить три основных компонента: функциональное наполнение, язык заданий и системное наполнение.

Функциональное наполнение отражает специфику предметной области объектов моделирования и представляет собой совокупность модулей. Это прежде всего программные модули, модули данных и модули документации. Состав функционального наполнения ППМ, его мощность и полнота

охвата им предметной области отражают объем прикладных знаний, заложенных в ППМ.

Язык заданий ППМ является средством общения пользователя с пакетом. Именно через язык заданий пользователь воспринимает и оценивает состав «вычислительных услуг», предоставляемых пакетом, а также удобство их использования. Общая структура и стиль языка ППМ зависят прежде всего от стратегии проведения моделирования:

- активная стратегия предусматривает при создании модели САУ модификацию имеющихся модулей функционального наполнения, а также разработку новых модулей;
- пассивная стратегия предусматривает проведение машинных экспериментов с моделью САУ без модификации функционального наполнения ППМ.

Язык заданий может быть реализован как в форме самостоятельного языка, так и в форме встроенного языка, т.е. расширения существующего языка программирования. Но независимо от формы реализации разработчик языка должен стремиться к тому, чтобы лексика и синтаксис языка заданий были как можно ближе к пользовательскому восприятию решаемых задач моделирования.

Системное наполнение ППМ представляет собой совокупность программ, которые обеспечивают выполнение заданий и взаимодействие пользователя с пакетом. Оно включает в себя следующие составляющие:

- резидентный монитор, который выполняет роль интерфейса как между отдельными компонентами системного наполнения, так и между ними и штатным программным обеспечением;
- транслятор входных заданий, который формирует внутреннее представление заданий и реализуется обычно в виде препроцессора;
- интерпретатор внутреннего представления задания;
- архив функционального наполнения;
- банк данных об объекте моделирования и машинном эксперименте;
- монитор организации процесса машинного моделирования, т.е. взаимодействия модулей по данным и управлению;
- планирование процесса машинного моделирования, который определяет последовательность выполнения процедур процесса моделирования;
- монитор организации диалогового режима с пользователем.

8.3. Общая характеристика системы MATLAB. ППП Control System Toolbox

Современная компьютерная математика предлагает целый набор интегрированных программных систем для автоматизации математических расчетов. Это Eureka, Mathematica, Maple, Mathcad, MATLAB, и др.

Одной из самых мощных и эффективных среди них является система MATLAB: MATrix LABoratory – матричная лаборатория.

Язык программирования этой системы является одним из лучших и высокоэффективных языков программирования для научно-технических расчетов. А также для создания удобных и очень наглядных визуально-ориентированных средств анализа, идентификации, построения и моделирования систем управления.

Современные версии системы MATLAB поставляются вместе с пакетом расширения Simulink специально для моделирования динамических систем. Этот пакет является самым ярким представителем программ, созданных на основе системы MATLAB. Он является мощнейшим инструментом познания реалий мира путём их моделирования. И эти возможности системы MATLAB+Simulink многократно усиливаются десятками пакетов расширения этой системы.

Этот пакет входит в состав MATLAB и предназначен для анализа и синтеза линейных стационарных систем управления (linear time invariant objects), т.е. для исследования lti-объектов. Этот класс объектов включает в себя линейные непрерывные и дискретные, одномерные системы с одним входом и одним выходом и многомерные системы с несколькими входами и (или) несколькими выходами.

Для описания системы управления в этом пакете можно использовать 3-и формы математических моделей:

1. *tf* – форма передаточной функции

$$H(s) = \frac{b_1 s^m + b_2 s^{m-1} + \dots + b_m s + b_{m+1}}{a_1 s^n + a_2 s^{n-1} + \dots + a_n s + a_{n+1}}, \quad m \leq n, \quad (7.33)$$

причём при описании дискретных систем комплексная переменная “*s*” в (7.33) заменяется на “*z*”.

Задаётся *tf* – форма в виде 2-х матриц-строк, составленных из коэффициентов соответственно числителя и знаменателя передаточной функции.

2. *zpk* – форма передаточной функции

$$H(s) = k \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}, \quad m \leq n, \quad (7.34)$$

причём при описании дискретных систем переменная “*s*” в (7.34) тоже заменяется на “*z*”.

Задаётся *zpk* – форма в виде обобщённого коэффициента передачи *k* и 2-х матриц-строк, которые составляются соответственно из нулей *z_j* и полюсов *p_i* передаточной функции. А коэффициент *k* определяется по формуле

$$k = \frac{b_{m+1} (-1)^n \prod_{i=1}^n p_i}{a_{n+1} (-1)^m \prod_{j=1}^m z_j}$$

3. *ss* – форма пространства состояний в виде системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u}, \quad \bar{y} = C\bar{x} + D\bar{u} \quad (7.35)$$

или в виде системы разностных уравнений при описании дискретных систем

$$\bar{X}[k+1] = A\bar{X}[k] + B\bar{U}[k], \quad \bar{Y}[k] = C\bar{X}[k] + D\bar{U}[k].$$

Задаётся *ss* – форма четвёркой матриц **A**, **B**, **C** и **D**.

ППП Control System Toolbox позволяет:

- преобразовывать одну форму ММ в другую;
- строить для *eti*-объектов ЛАЧХ и ЛФЧХ, АФХ, переходную и импульсную переходные функции, корневой годограф;
- вычислять запасы устойчивости по модулю и фазе, а также максимальное значение АЧХ и соответствующую ему частоту;
- понижать порядок и формировать канонические формы математических моделей;
- создавать модели систем управления со случайными параметрами и моделировать процессы при произвольных входных сигналах;
- исследовать управляемость и наблюдаемость *eti*-объектов на основе вычисления функции Грамма, которые проще матриц вычисления ранга матриц управляемости и наблюдаемости.

Наряду с задачами анализа данный ППП позволяет решать и задачи синтеза как непрерывных, так и дискретных регуляторов, наблюдателей и фильтров Калмана, для оценки переменных состояния систем управления.

Причём регуляторы могут синтезироваться как на основе метода модального управления, так и на основе метода аналитического конструирования по минимуму интегрального квадратичного критерия качества.

8.4. ППП Nonlinear Control Design Block set

Пакет предназначен для настройки параметров регуляторов нелинейных систем, в том числе и многомерных систем с нестационарными параметрами, на заданные показатели качества переходных процессов. В каталоге библиотеки этого пакета содержится всего три блока:

- CRMS (Continuous RMS);
- DRMS (Discrete RMS);
- NCD Out port.

Блок CRMS по сути является вычислителем среднеквадратического значения от входного сигнала $U(t)$, т.е.

$$y(t) = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T U^2(t) dt}.$$

Блок DRMS выполняет ту же операцию, но по отношению к дискретному входному сигналу.

Блок NCD Out port является основным. Он имеет рабочее окно со своим меню и позволяет выполнять следующие операции:

- задавать требуемые ограничения во временной области на любой сигнал оптимизируемой системы;
- указывать варьируемые параметры, подлежащие настройке;
- указывать нестационарные параметры и диапазон изменения их значений;
- проводить настройку варьируемых параметров на заданные, в силу требуемых ограничений, показатели качества переходных процессов системы.

Порядок работы с пакетом NCD

1. В среде Simulink создаётся модель исследуемой САУ.
2. Входы блоков NCD Out port соединяются с выходами блоков модели, на выходные сигналы которых накладываются ограничения. Это могут быть, в частности, как входные сигналы системы, так и её среднеквадратические ошибки.
3. В режиме командной строки задаются начальные значения варьируемых параметров, подлежащих настройке.
4. Двойным щелчком левой клавиши мыши на пиктограмме блоков NCD Out port они раскрываются.
5. При помощи мыши исходя из заданных ограничений устанавливаются граничные линии для запретных областей соответствующих входных сигналов блоков NCD.
6. С помощью меню блоков NCD задаётся интервал дискретизации их входных сигналов порядка $1 \div 2\%$ от длительности процесса моделирования.
7. Указываются имена (идентификаторы) варьируемых параметров системы, подлежащих настройке.
8. Задаются нестационарные параметры системы и указываются их номинальные значения и диапазон изменения.
9. Процесс настройки параметров системы начинается после нажатия кнопки Start.
10. Найденные значения настроечных параметров системы можно узнать, если набрать в командной строке MATLAB имена этих параметров.

Более подробно см. Специальный справочник:

Дьяконов В. и Круглов В. MATLAB. Анализ, идентификация и моделирование систем. – СПб: Питер, 2002. – 448 с.

Этот справочник содержит 8 пакетов расширения системы “MATLAB + Simulink”.

Литература

1. Рогачев Г.Н. Моделирование систем: Учеб. пособ. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2004. – 170 с.

2. Рубанов В.Г., Филатов А.Г. *Моделирование систем: учеб. Пособие.* - Белгород: Изд-во БГТУ, 2006.- 349 с.
3. Советов Б.Я. *Моделирование систем.* – М.: Высш. шк., 2001.
4. Герман-Галкин С.Г. *Matlab Simulink. Проектирование мехатронных систем на ПК.* - СПб.: КОРОНА-Век, 2008.- 368 с.
5. Гулятьев А. *MATLAB 5.2. Имитационное моделирование в среде Windows: Практическое пособие.* – СПб.: КОРОНА-принт, 1999.- 288 с.
6. Сольнищев Р.И. *Автоматизация проектирования систем автоматического управления.* – М.: Высш. школа, 1991. – 335 с.
7. *Основы моделирования систем автоматического регулирования* /В.И. Голубничий, В.Л. Селиванов. – Киев: Вища шк., 1984. – 160 с.
8. Крутько П.Д. *Алгоритмы и программы проектирования автоматических систем.* – М.: Радио и связь, 1988. – 306 с.
9. Шеннон Р. *Имитационное моделирование систем – искусство и наука.* – М.: Мир, 1978. – 420 с.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МОДЕЛИРОВАНИЯ И КЛАССИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ.....	3
1.1. Определение, критерии применения и достоинства метода моделирования.....	3
1.2. Основные принципы моделирования.....	4
1.3. Классификация моделей систем управления по характеру и способам использования.....	5
2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМ И ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ.....	7
2.1. Основные формы математических моделей.....	7
2.2. Уравнения состояния непрерывных систем в канонических формах Жордана.....	8
2.3. Уравнения состояния непрерывных систем в нормальной форме (форме фазовых переменных).....	11
2.4. Уравнения с переменными состояниями в виде линейных комбинаций входных и выходных величин.....	13
2.5. Уравнения состояния многосвязных непрерывных систем.....	14
2.6. Уравнения состояния дискретных систем в канонических формах Жордана.....	16
2.7. Каноническая декомпозиция дискретных систем и соответствующие формы их уравнений состояния.....	19
2.8. Математическая модель в канонической форме достижимости.....	20
2.9. Математическая модель в канонической форме управляемости.....	21
2.10. Математическая модель в канонической форме наблюдаемости.....	23
2.11. Математическая модель в канонической форме восстанавливаемости.....	24
3. МЕТОДЫ УПРОЩЕНИЯ, ЗАДАЧИ И ЦЕЛИ ИССЛЕДОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ.....	26
3.1. Методы декомпозиции и редукции.....	26
3.2. Задачи и цели исследования ММ.....	28
4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ.....	30
4.1. Особенности математического моделирования на цифровых, аналоговых и гибридных ЭВМ.....	30
4.2. Ошибки вычислений на АВМ и ЦВМ.....	31
4.3. Общие принципы подготовки математической модели к исследованию на АВМ.....	32
4.4. Программирование АВМ для уравнений, разрешимых относительно старшей производной.....	34
4.5. Программирование АВМ для нелинейных уравнений, неразрешимых относительно старшей производной.....	36

4.6. Особенности метода структурного моделирования систем на АВМ...	38
4.7. Масштабирование математического описания и расчет масштабных коэффициентов модели.....	40
4.8. Классические (одношаговые) численные методы моделирования на ЦВМ.....	42
4.9. Многошаговые численные методы моделирования.....	42
4.10. Неявные численные методы моделирования.....	44
4.11. Матричные методы моделирования систем в пространстве состояний.....	45
4.12. Особенности метода структурного моделирования непрерывных систем на ЦВМ.....	46
5. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ.....	49
5.1. Исследование устойчивости линейных систем на основе применения критерия Рауса.....	49
5.2. Исследование устойчивости систем по норме и следу функционально преобразованной матрицы.....	51
5.3. Частотные методы исследования моделей линейных систем.....	51
5.4. Исследование линейных моделей системы на основе применения корневых, интегральных и прямых оценок качества.....	53
5.5. Исследование абсолютной устойчивости состояния равновесия нелинейной системы.....	54
5.6. Исследование нелинейных моделей систем методами линейной теории и моделирования на ЭВМ.....	56
5.7. Параметрическая оптимизация нелинейных моделей систем.....	57
5.8. Алгоритм определения предельного коэффициента усиления нелинейной системы с абсолютно устойчивым состоянием равновесия.....	59
6. ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ.....	61
6.1. Определение, цель, достоинства и недостатки имитационного моделирования.....	61
6.2. Построение концептуальной модели системы и её формализации....	62
6.3. Алгоритмизация модели и её машинная реализация.....	64
6.4. Получение и интерпретация результатов моделирования.....	66
6.5. Понятие о планируемом факторном эксперименте с имитационной моделью.....	67
6.6. Выбор области варьирования факторов и аппроксимации функции отклика.....	69
6.7. План полного факторного эксперимента.....	71
6.8. Планы дробных факторных экспериментов.....	73
6.9. Тактическое планирование эксперимента.....	75
6.10. Метод наименьших квадратов и регрессионный анализ результатов эксперимента.....	76

6.11. Проверка адекватности уравнения регрессии и значимости его коэффициентов.....	78
6.12. Принятие решений после построения модели (уравнения регрессии).....	79
6.13. Крутое восхождение при решении задач параметрической оптимизации.....	80
7. СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НА ЭВМ.....	82
7.1. Методы статистического моделирования. Метод Монте–Карло.....	82
7.2. Базовые и производные случайные воздействия. Моделирование случайных событий.....	83
7.3. Моделирование случайных величин. Метод обратных функций.....	84
7.4. Метод Неймана и табличный метод.....	85
7.5. Моделирование векторных случайных величин и случайных процессов на конечном интервале времени.....	86
7.6. Моделирование типовых случайных процессов.....	87
7.7. Общая схема алгоритма статического моделирования.....	88
7.8. Распределение вероятностей случайных величин.....	90
7.9. Основные числовые характеристики плотности вероятности и их оценки.....	92
7.10. Оценки математического ожидания, дисперсии и корреляционной функции стационарных случайных процессов.....	94
7.11. Оценка спектральной плотности случайных процессов.....	95
7.12. Оценка точности и достоверности результатов моделирования.....	96
7.13. Определение необходимого объема выборки.....	97
8. ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ СРЕДСТВА.....	99
8.1. Вычислительные средства.....	99
8.2. Понятие о пакетах прикладных программ моделирования.....	100
8.3. Общая характеристика системы MATLAB. ППП Control System Toolbox.....	102
8.4. ППП Nonlinear Control Design Block set.....	103
Литература.....	104